Uniwersytet Śląski
Instytut Matematyki
Praca doktorska

Implikacje rozmyte generowane z kopuł

Autor:
Piotr Helbin

Promotor:
dr hab. Michał Baczyński

Katowice, 2017

Spis treści

Wstęp

Implikacje rozmyte są jednymi z najważniejszych spójników logiki rozmytej, które uogólniają klasyczne implikacje dla klasycznej logiki na odcinek $[0, 1]$. Ponadto implikacje rozmyte odgrywają ważną rolę w takich zastosowaniach jak wnioskowaniu przybliżonym, rozmytym rozpoznawaniu obrazu, problemach decyzyjnych, logice wielowartościowej, itd. W związku z tym zachodzi potrzeba wyznaczania implikacji rozmytej w zależności od konkretnego problemu. Najpopularniejsze sposoby otrzymania implikacji rozmytej można podzielić na trzy kategorie.

Pierwszą kategorią są implikacje rozmyte otrzymane z innych spójników logicznych np. R-implikacje, (S,N)-implikacje czy QL-operacje (patrz [6]).

Drugą kategorią są implikacje rozmyte otrzymane z funkcji jednej zmiennej w szczególności z funkcji ciągłych i monotonicznych. Takimi implikacjami rozmytymi są np. implikacje f, g Yagera [54], implikacje h Jayarama [31], implikacje h_g Massaneta i Torrensa [41].

Ostatnią kategorią są implikacje rozmyte otrzymane z innych implikacji rozmytych. Przykłady takich implikacji można znaleźć w [2], [7], [13], [19], [30], [43], [52], [53].

Celem następującej dysertacji jest uporządkowanie informacji o implikacjach rozmytych generowanych z dwuwartościowych kopuł, bądź z funkcji ogólniejszych (np. z semikopuł). Kopuły są ważnymi funkcjami w probabilistyce. Ważność kopuł w rachunku prawdopodobieństwa wynika z twierdzenia Sklara, które mówi, że dla wspólnej dystrybuanty H zmiennych losowych $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ (dla $n \geq 2$) z dystrybuantami brzegowymi $(F_i)_{1\leq i\leq n}$ istnieje taka kopuła $C\colon [0,1]^n \to [0,1]$, że dystrybuantę H można zapisać w następującej postaci

$$H(x_1, x_2, \dots x_n) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots F_n(x_n)), \qquad x_1, x_2, \dots x_n \in \mathbb{R}.$$

Jeżeli dystrybuanty $(F_i)_{1\leq i\leq n}$ są ciągłe, to kopuła C jest jedyna. Ponadto, gdy funkcja H jest zdefiniowana za pomocą powyższego wzoru, to jest wspólną dystrybuantą z dystrybuantami brzegowymi $(F_i)_{1\leq i\leq n}$. W pracach [25], [26] Grzegorzewski wprowadził cztery nowe klasy implikacji rozmytych, oparte na kopułach wykorzystując twierdzenie Sklara. Mianowice, implikacje probabilistyczne, implikacje s-probabilistyczne, implikacje dualne oraz implikacje s-dualne. W pracy [12] autorzy, w podobny sposób jak Grzegorzewski, wprowadzili nową rodzinę implikacji opartych na kopułach, tak zwane implikacje warunkowe. Okazuje się, że klasa funkcji $J_{I,B}\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ (zaprezentowana pierwszy raz na konferencji IFSA-EUSFLAT 2015 [4]) następującej postaci

$$J_{I,B}(x, y) = I(x, B(x, y)), \qquad x, y \in [0, 1],$$

gdzie I jest implikacją rozmytą, a B semikopułą, uogólnia wszystkie cztery klasy implikacji generowanych z kopuł wprowadzone przez Grzegorzewskiego.

Rozdział I zawiera informacje wstępne dotyczące podstawowych spójników logicznych, kopuł, qausikopuł i semikopuł wraz z ich najważniejszymi własnościami oraz kilka przydatnych własności funkcji rzeczywistych.

Rozdział II jest poświęcony rozwiązaniu równania Franka [20], który to dowód jest rzadko prezentowany w monografiach, ale t-normy Franka, które są rozwiązaniem równania Franka, są dość często przytaczane w wielu pracach. Ponadto okazuje się, że wiele równań dla kopuł, wynikających z odpowiednich własności dla implikacji s-probabilistycznych, można rozwiązać wykorzystując t-normy Franka. Dlatego też prezentujemy pełny dowód rozwiązania równania Franka w wersji dla t-norm i dla kopuł.

Rozdział III jest poświęcony omówieniu dwóch ważnych klas implikacji. Pierwszą z nich są implikacje indukowane z semikopuł. Implikacje indukowane były znane dużo wcześniej w literaturze (por. [9]). Przez implikację indukowaną z t-normy T rozumiemy funkcję $I_T \colon [0,1]^2 \to [0,1]$ następującej postaci

$$I_T(x,y) = \sup\{t \in [0,1] \mid T(x,t) \leq y\}, \qquad x,y \in [0,1].$$

W zastosowaniach wymóg t-normy dla implikacji indukowanej jest dość „kłopotliwy”, ze względu na łączność t-norm. Dlatego zachodzi potrzeba rozważenia implikacji indukowanych generowanych z semikopuł. Semikopuły nie wymagają warunku łączności. Ponadto do klasy semikopuł należą t-normy, kopuły i quasikopuły. Drugą z klas implikacji omawianych w rozdziale III są funkcje wspomniane już wcześniej, mianowicie funkcje postaci $I(x, B(x,y))$, gdzie I jest implikacją rozmytą, a B jest semikopułą. Przedstawione własności tej klasy funkcji bazują na wynikach pracy [5] uzyskanych przez Autora we współpracy z M. Baczyńskim, R.Mesiarem, P. Grzegorzewskim, W. Niemyską.

W rozdziale IV pokazano jak przy pomocy twierdzenia Sklara można otrzymać takie funkcje jak implikacje probabilistyczne, s-probabilistyczne, warunkowe, dualne oraz s-dualne. Ponadto przedstawiano podstawowe własności tych klas funkcji.

W ostatni rozdziale V zaprezentowane są nowe wyniki z pracy [3], uzyskane przez Autora we współpracy z M. Baczyńskim, P. Grzegorzewskim, W. Niemyską oraz nieopublikowane wyniki uzyskane przez Autora. W skład tych wyników wchodzą takie własności implikacji z rozdziału IV jak prawa kontrapozycji, prawo importacji, T-conditionality oraz przecięcia klas tych funkcji z innymi znanymi klasami implikacji rozmytych.

W niniejszej pracy przyjęto konwencję, w której wszystkie rezultaty są podane z odnośnikami do źródeł, z wyjątkiem nieopublikowanych rezultatów uzyskanych przez Autora, które są podane bez odnośników.

Rozdział 1

Preliminaria

W tym rozdziale omówimy spójniki logiczne wykorzystywane w logice rozmytej wraz z najważniejszymi twierdzeniami logiki rozmytej. Omówimy również najważniejsze fakty dotyczące kopuł, semikopuł i quasikopuł. Zanim jednak przystąpimy do omawiania spójników logicznych i kopuł, przypomnimy kilka pojęć z analizy matematycznej.

1.1 Własności funkcji rzeczywistych

W pracy będziemy mieli do czynienia głównie z funkcjami jednej (określonymi w podzbiorach $\mathbb{R}$) bądź dwóch zmiennych (określonymi w podzbiorach $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$) o wartościach w podzbiorach $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Ciągłość funkcji będziemy rozumieć standardowo, gdzie zbieżność w $\mathbb{R}$ jest zbieżnością w metryce euklidesowej w $\mathbb{R}$, a zbieżność w $\mathbb{R}^2$ jest zbieżnością w metryce euklidesowej w $\mathbb{R}^2$. Z pojęciem ciągłości wiąże się następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.1 ([51, Theorem 3.1.3])**.** *Niech $a, b \in \mathbb{R}$ i $a < b$. Jeśli funkcja $F\colon [a,b]^2 \to [a,b]$ jest ciągła i niemalejąca względem obu zmiennych z osobna, to F jest funkcją ciągłą.*

Szczególną klasą funkcji ciągłych jest klasa funkcji spełniających warunek Lipschitza.

Definicja 1.2. Niech $N \in \{1, 2, \ldots\}$. Powiemy, że funkcja $F\colon [0,1]^N \to [0,1]$ spełnia **warunek Lipschitza**, gdy istnieje taka stała $\lambda > 0$ (mówimy wtedy, że jest λ-lipschitzowska), że

$$|F(x) - F(y)| \leq \lambda \sum_{i=1}^{N} |x_i - y_i|,$$

gdzie $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in [0,1]^N$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_N) \in [0,1]^N$.

Niech $f\colon A \to B$, gdzie $\emptyset \neq A$, $B \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ i niech $a \in A$. Będziemy stosować następujący zapis

$$f(a^+) = \lim_{x \to a^+} f(x), \qquad f(a^-) = \lim_{x \to a^-} f(x).$$

Powiemy, że f jest ciągła lewostronnie w a, gdy $f(a) = f(a^-)$. Analogicznie powiemy, że f jest ciągła prawostronnie w a, gdy $f(a) = f(a^+)$. W przypadku funkcji wielu zmiennych powiemy, że funkcja jest ciągła prawostronnie (lewostronnie), gdy jest ciągła prawostronnie (lewostronnie) dla każdej zmiennej z osobna. W pracy zachodzi potrzeba użycia bardziej szczególnej klasy niż klasa funkcji ciągłych, mianowicie funkcji ciągłych bezwzględnie.

Definicja 1.3 ([38, str. 168]). Niech $a, b \in \mathbb{R}$ i $a < b$. Funkcję $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ nazywamy **ciągłą bezwzględnie**, gdy dla każdego $\varepsilon > 0$, istnieje takie $\delta > 0$, że dla każdych liczb

$$a \leq x_1 \leq y_1 \leq x_2 \leq y_2 \ldots \leq x_n \leq y_n \leq b,$$

spełniony jest warunek

$$\sum_{k=1}^{n} |y_k - x_k| < \delta \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} |f(y_k) - f(x_k)| < \varepsilon.$$

Wniosek 1.4. *Każda funkcja spełniająca warunek Lipschitza jest ciągła bezwzględnie.*

Twierdzenie 1.5 ([38, twierdzenie 4, § 4]). *Niech $a, b \in \mathbb{R}$ i $a < b$. Jeśli $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą bezwzględnie, to funkcja f jest prawie wszędzie różniczkowalna, jej pochodna jest całkowalna w sensie Lebesgue'a oraz dla wszystkich $x \in [a,b]$ zachodzi*

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt.$$

Jednym z ważniejszych pojęć analizy matematycznej jest pojęcie wypukłości. Przez kombinacje wypukłą elementów $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, rozumiemy sumę

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i, \quad \text{gdzie } \lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0, \text{ i } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1.$$

Funkcję wypukłą definiujemy następująco.

Definicja 1.6 ([44, str. 92]). Mówimy, że funkcja $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ jest **wypukła**, gdy

$$\forall_{x,y \in (a,b)} \forall_{\lambda \in [0,1]} \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Podobnie definiujemy funkcje wklęsłe.

Definicja 1.7 ([44, str. 93]). Mówimy, że funkcja $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ jest **wklęsła**, gdy funkcja $-f$ jest wypukła.

Lemat 1.8 ([44, Twierdzenie IV.1.5]). *Funkcja $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ jest wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdych takich $x, y, z \in (a,b)$, że $x < z < y$ zachodzi poniższy warunek*

$$\left(\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z} \right).$$

Twierdzenie 1.9 ([44, Twierdzenie IV.1.6]). *Załóżmy, że funkcja $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w (a,b). Wtedy funkcja f jest wypukła (wklęsła) wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja f' jest niemalejąca (nierosnąca).*

W pracy będziemy również korzystali kilkakrotnie z notacji potęgowej $x_F^{[n]}$, która dla funkcji $F\colon [0,1] \to [0,1]$ z elementem neutralnym e oraz dla $n \in \mathbb{N}$ i $x \in [0,1]$ jest zdefiniowana przez

$$x_F^{[n]} = \begin{cases} e, & n = 0 \\ x, & n = 1 \\ F(x, x_F^{[n-1]}), & n > 1 \end{cases}.$$

1.2 Zbiory rozmyte

W potocznym języku często używamy pojęć nieprecyzyjnych takich jak mały, duży, wolny, szybki. Takie nieprecyzyjne pojęcia odgrywają ważną rolę w ludzkim rozumowaniu, w szczególności w rozpoznawaniu wzorów, przekazywaniu informacji. Zbiory rozmyte zostały wprowadzone po to by móc matematycznie opisać tego typu sytuacje. Pojęcie zbioru rozmytego zostało po raz pierwszy wprowadzone przez Zadeha [55] jako uogólnienie pojęcia funkcji charakterystycznej zbioru $A \subseteq X$:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}.$$

Idea zbioru rozmytego polega na zastąpieniu zbioru wartości $\{0,1\}$ przez przedział $[0,1]$. W myśl tej idei zbiór rozmyty definiujemy jako funkcję określoną w zbiorze X i przyjmującą wartości w przedziale $[0,1]$.

Definicja 1.10. Niech $X \neq \emptyset$. Przez **zbiór rozmyty** A rozumiemy dowolną funkcję $A\colon X \to [0,1]$. Rodzinę zbiorów rozmytych oznaczamy przez $\mathcal{F}(X)$.

W literaturze można znaleźć ogólniejsze definicje zbioru rozmytego, gdzie zamiast przedziału $[0,1]$ rozważa się kratę L (patrz [50],[23],[1]), my się skupimy tylko na przypadku przedziału $[0,1]$. W klasycznej teorii mnogości działania na zbiorach są zdefiniowane przy pomocy klasycznych spójników logicznych. Ponieważ zbiory rozmyte są funkcjami dlatego zachodzi potrzeba zdefiniowania spójników logicznych na przedziale $[0,1]$. Zadeh w [55] zaproponował następujące definicje.

Definicja 1.11. Niech $X \neq \emptyset$ i $A, B \in \mathcal{F}(X)$. Wtedy:

(i) zbiór rozmyty A jest pusty, gdy $A(x) = 0$, dla każdego $x \in X$;

(ii) dwa zbiory rozmyte A i B są równe, gdy $A(x) = B(x)$, dla każdego $x \in X$;

(iii) zbiór rozmyty A zawiera się w zbiorze rozmytym B, co oznaczamy przez $A \subset B$, gdy
$$A(x) \leq B(x), \qquad x \in X;$$

(iv) dopełnieniem zbioru rozmytego A nazywamy taki zbiór rozmyty A', że
$$A'(x) = 1 - A(x), \qquad x \in X;$$

(v) sumą dwóch zbiorów rozmytych A i B jest zbiór rozmyty $C = A \vee B$ następującej postaci
$$C(x) = \max(A(x), B(x)), \qquad x \in X;$$

(vi) przekrojem dwóch zbiorów rozmytych A i B jest zbiór rozmyty $C = A \wedge B$ następującej postaci

$$C(x) = \min(A(x), B(x)), \qquad x \in X.$$

Okazuje się, że tak określone rozszerzenia sumy, iloczynu i dopełnienia na zbiory rozmyte nie są jedyne. Można zdefiniować te operacje przy pomocy różnych spójników logicznych, uzyskując w ten sposób rożne własności. Tymi spójnikami logicznymi zajmiemy się w tym rozdziale.

1.3 Implikacje rozmyte

Implikacje rozmyte są jednymi z czterech najważniejszych spójników logicznych stosowanych w logice rozmytej. Uogólniają klasyczne implikacje dla dwuwartościowej logiki na odcinek $[0,1]$.

Definicja 1.12 ([6, Definition 1.1.1]). Funkcję $I\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ nazywamy **implikacją rozmytą**, jeżeli dla każdych $x, y, x_1, x_2, y_1, y_2 \in [0,1]$ spełnione są poniższe warunki:

(I1) $x_1 \leq x_2 \Rightarrow I(x_1, y) \geq I(x_2, y)$,

(I2) $y_1 \leq y_2 \Rightarrow I(x, y_1) \leq I(x, y_2)$,

(I3) $I(0,0) = I(1,1) = 1$ oraz $I(1,0) = 0$.

nazwa	wzór
Łukasiewicza	$I_{\mathbf{LK}}(x,y) = \min(1-x+y, 1)$
Gödela	$I_{\mathbf{GD}}(x,y) = \begin{cases} 1, & x \leq y \\ y, & x > y \end{cases}$
Goguena	$I_{\mathbf{GG}}(x,y) = \begin{cases} 1, & x \leq y \\ \frac{y}{x}, & x > y \end{cases}$
Reichenbacha	$I_{\mathbf{RC}}(x,y) = 1 - x + x \cdot y$
Gaines–Reschera	$I_{\mathbf{GR}}(x,y) = \begin{cases} 1, & x \leq y \\ 0, & x > y \end{cases}$
Kleene-Dinesa	$I_{\mathbf{KD}}(x,y) = \max(1-x, y)$
Drastyczna	$I_{\mathbf{D}}(x,y) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ y, & x > 0 \end{cases}$
Webera	$I_{\mathbf{WB}}(x,y) = \begin{cases} 1, & x < 1 \\ y, & x = 1 \end{cases}$
Fodora	$I_{\mathbf{FD}}(x,y) = \begin{cases} 1, & x \leq y \\ \max(1-x, y), & \text{w pp.} \end{cases}$

Tabela 1.1: Przykłady implikacji rozmytych

Przykład 1.13. W tabeli 1.1 podajemy przykłady najważniejszych implikacji rozmytych (por. [6]).

Wprost z definicji implikacji rozmytej otrzymujemy.

Uwaga 1.14 ([6, Theorem 6.2.2])**.** Kombinacja wypukła implikacji rozmytych jest implikacją rozmytą.

Definicja 1.15 ([6, Defintion 1.3.1])**.** Powiemy, że implikacja I spełnia

(i) ***własność identyczności*** (ang. *identity principle*), jeśli

$$I(x,x) = 1, \qquad x \in [0,1]. \tag{IP}$$

(ii) ***warunek lewej neutralności*** (ang. *left neutrality property*), jeśli

$$I(1,y) = y, \qquad y \in [0,1]. \tag{NP}$$

(iii) ***warunek wymiany*** (ang. *exchange principle*), jeśli

$$I(x, I(y,z)) = I(y, I(x,z)), \qquad x,y,z \in [0,1]. \tag{EP}$$

(iv) ***warunek porządku*** (ang. *ordering property*), jeśli

$$x \le y \iff I(x,y) = 1, \qquad x,y \in [0,1]. \tag{OP}$$

Własność identyczności (IP) ma swoje źródło w logice klasycznej, mianowicie jest uogólnieniem następującej tautologii

$$(p \to p) \equiv 1.$$

Warunek lewej neutralności (NP) jest uogólnieniem następującej tautologii

$$(1 \to p) \equiv p.$$

Warunek wymiany (EP) jest uogólnieniem następującej tautologii

$$(p \to (q \to r)) \equiv (q \to (p \to r)).$$

Warunek porządku (OP) jest uogólnieniem warunku (**I3**) oraz równania $I(0,1) = 1$ na cały odcinek $[0,1]$.

Przykład 1.16. W tabeli 1.2 podajemy przykłady najważniejszych implikacji rozmytych wraz z ich głównymi własnościami (por. [6]).

implikacja rozmyta	(IP)	(NP)	(EP)	(OP)
$I_{\mathbf{LK}}$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$
$I_{\mathbf{GD}}$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$
$I_{\mathbf{GG}}$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$
$I_{\mathbf{RC}}$	$\times$	$\surd$	$\surd$	$\times$
$I_{\mathbf{GR}}$	$\surd$	$\times$	$\times$	$\surd$
$I_{\mathbf{KD}}$	$\times$	$\surd$	$\surd$	$\times$
$I_{\mathbf{D}}$	$\times$	$\surd$	$\surd$	$\times$
$I_{\mathbf{WB}}$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\times$
$I_{\mathbf{FD}}$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$

Tabela 1.2: Przykłady implikacji rozmytych wraz z ich głównymi własności

nazwa	wzór
negacja klasyczna	$N_{\mathbf{C}}(x) = 1 - x$
negacja drastyczna D1	$N_{\mathbf{D1}}(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$
negacja drastyczna D2	$N_{\mathbf{D2}}(x) = \begin{cases} 0, & x = 1 \\ 1, & x < 1 \end{cases}$

Tabela 1.3: Przykłady negacji rozmytych

1.4 Negacje rozmyte

Następnym ważnym spójnikiem logicznym są negacje rozmyte, które uogólniają klasyczne negacje dla dwuwartościowej logiki na odcinek $[0, 1]$.

Definicja 1.17 ([6, Definition 1.4.1])**.** Nierosnącą funkcję $N\colon [0,1] \to [0,1]$ nazywamy **negacją rozmytą**, jeśli $N(0) = 1$, $N(1) = 0$. Ponadto, negację rozmytą N nazywamy negacją

1. **ścisłą**, gdy jest ściśle malejąca i ciągła;

2. **silną**, gdy jest inwolucją, czyli $N(N(x)) = x$, dla wszystkich $x \in [0, 1]$.

Przykład 1.18. W tabeli 1.3 podajemy przykłady najważniejszych negacji rozmytych (por. [6]).

Lemat 1.19 ([6, Definition 1.4.14])**.** *Niech funkcja $I\colon [0,1] \to [0,1]$ będzie implikacją rozmytą. Wtedy funkcja $N_I\colon [0,1] \to [0,1]$ zdefiniowana następująco*

$$N_I(x) = I(x, 0), \qquad x \in [0, 1],$$

*jest negacją rozmytą. Taką funkcję N_I nazywamy **negacją naturalną** implikacji I.*

1.5 Normy trójkątne

Następnym ważnym spójnikiem logicznym są normy trójkątne, które uogólniają klasyczne koniunkcje dla dwuwartościowej logiki na odcinek $[0,1]$.

Definicja 1.20 ([34, Definition 1.1])**.** Funkcję $T\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ nazywamy **normą trójkątną** (w skrócie t-normą), gdy dla każdych $x, y, z, y_1, y_2 \in [0,1]$ spełnione są następujące warunki:

(T1) $T(x,y) = T(y,x)$, (**przemienność**)

(T2) $T(x, T(y,z)) = T(T(x,y), z)$, (**łączność**)

(T3) $y_1 \leq y_2 \Rightarrow T(x, y_1) \leq T(x, y_2)$, (**monotoniczność**)

(T4) $T(x,1) = x$. (**element neutralny 1**)

Definicja 1.21 ([24, Definition 2.9])**.** T-normę T nazywamy

1. **archimedesową**, jeśli dla dowolnych $x, y \in (0,1)$ istnieje takie $n \in \mathbb{N}$, że
$$x_T^{[n]} < y;$$
2. **ścisłą**, jeśli jest ciągła oraz dla dowolnych $x \in (0,1]$ i $y_1, y_2 \in [0,1]$
$$y_1 < y_2 \Rightarrow T(x, y_1) < T(x, y_2);$$
3. **nilpotentną**, jeśli jest ciągła oraz każdy $x \in (0,1)$ jest elementem nilpotentnym T, czyli gdy istnieje takie $n \in \mathbb{N}$, że $x_T^{[n]} = 0$;
4. **idempotentną**, jeśli każdy $x \in [0,1]$ jest elementem idempotentnym T, czyli gdy $T(x,x) = x$ dla każdego $x \in [0,1]$.

Uwaga 1.22.

1. ([24, Proposition 5.1.2]) Jeśli t-norma T jest ciągła, to jest archimedesowa wtedy i tylko wtedy, gdy
$$T(x,x) < x, \qquad x \in (0,1).$$
2. ([34, Proposition 2.15]) Jeśli t-norma T jest ścisła lub nilpotentna, to jest archimedesowa.
3. ([34, Remark 1.5]) Niech T będzie t-normą, wtedy
$$T_{\mathbf{D}}(x,y) \leq T(x,y) \leq T_{\mathbf{M}}(x,y), \qquad x, y \in [0,1].$$

Przykład 1.23. W tabeli 1.4 podajemy przykłady najważniejszych t-norm wraz z ich najważniejszymi własnościami (por. [34]).

Twierdzenie 1.24 ([34, Theorem 5.1])**.** *Dla funkcji $T\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ następujące warunki są równoważne:*

1. *T jest t-normą ciągłą archimedesową.*

t-norma	wzór	własności
Minimum	$T_{\mathbf{M}}(x,y)=\min(x,y)$	ciągła, idempotentna
Łukasiewicza	$T_{\mathbf{LK}}(x,y)=\max(x+y-1,0)$	nilpotentna
Produktowa	$T_{\mathbf{P}}(x,y)=x\cdot y$	ścisła
Drastyczna	$T_{\mathbf{D}}(x,y)=\begin{cases}0, & x,y\in[0,1)\\ \min(x,y), & \text{w pp.}\end{cases}$	archimedesowa, nieciągła
Nilpotentne minimum	$T_{\mathbf{nM}}(x,y)=\begin{cases}0, & x+y\le 1\\ \min(x,y), & \text{w pp.}\end{cases}$	ciągła lewostronnie

Tabela 1.4: Przykłady t-norm wraz z ich głównymi własności

2. *T ma ciągły addytywny generator, tzn. istnieje taka funkcja ciągła ściśle malejąca $f\colon[0,1]\to[0,\infty]$ spełniająca $f(1)=0$, która jest jednoznaczna z dokładnością do mnożenia przez stałą dodatnią, że*
$$T(x,y)=f^{(-1)}(f(x)+f(y)),\qquad x,y\in[0,1],\tag{1.1}$$
gdzie funkcję $f^{(-1)}$ nazywamy pseudo odwrotnością funkcji f określoną wzorem
$$f^{(-1)}(x)=\begin{cases}f^{-1}(x), & x\in[0,f(0)],\\ 0, & x\in(f(0),\infty].\end{cases}$$

Uwaga 1.25 ([34, Collary 3.30])**.** 1. Powyższą reprezentację t-normy ciągłej archimedesowej możemy zapisać w następujący sposób
$$T(x,y)=f^{-1}(\min(f(x)+f(y),f(0))),\qquad x,y\in[0,1].$$

2. T jest t-normą ścisłą wtedy i tylko wtedy, gdy każdy addytywny generator f t-normy T spełnia warunek $f(0)=\infty$.

3. T jest t-normą nilpotentną wtedy i tylko wtedy, gdy każdy addytywny generator f t-normy T spełnia warunek $f(0)<\infty$.

Przykład 1.26. Generatorem addytywnym t-normy produktowej $T_{\mathbf{P}}$ i t-normy Łukasiewicza $T_{\mathbf{LK}}$ są odpowiednio funkcje $f(x)=-\ln x$ i $f(x)=1-x$.

Twierdzenie 1.27 ([34, Theorem 5.11])**.** *Dla funkcji $T\colon[0,1]^2\to[0,1]$ następujące warunki są równoważne:*

1. *T jest t-normą ciągłą.*

2. *T jest sumą porządkową t-norm ciągłych archimedesowych, czyli istnieje jedyny zbiór przeliczalny A, jedyna rodzina parami rozłącznych otwartych podprzedziałów $J=\{(a_\alpha,b_\alpha)\mid\alpha\in A\}$ przedziału $[0,1]$ i jedyna rodzina takich t-norm ciągłych archimedesowych $(T_\alpha)_{\alpha\in A}$, że*
$$T(x,y)=\begin{cases}a_\alpha+(b_\alpha-a_\alpha)T_\alpha\left(\frac{x-a_\alpha}{b_\alpha-a_\alpha},\frac{y-a_\alpha}{b_\alpha-a_\alpha}\right), & x,y\in[a_\alpha,b_\alpha],\\ \min(x,y), & \textit{w przeciwnym przypadku.}\end{cases}$$
Zapisujemy $T=(\langle a_\alpha,b_\alpha,T_\alpha\rangle)_{\alpha\in A}$, t-normy T_α nazywamy członami t-normy T. W przypadku, gdy $J=\{[0,1]\}$, to funkcja T jest t-normą ciągłą archimedesową. W przypadku, gdy $J=\emptyset$, to suma porządkowa sprowadza się do funkcji $\min(x,y)$. W szczególności zbiór idempotentów T jest równy $[0,1]\setminus\bigcup_{\alpha\in A}(a_\alpha,b_\alpha)$.

1.6 Konormy trójkątne

Ostatnim wartym omówienia spójnikiem logiki rozmytej są konormy trójkątne. Uogólniają klasyczne alternatywy dla logiki dwuwartościowej na odcinek $[0,1]$.

Definicja 1.28 ([34, Definition 1.13])**.** Funkcję $S\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ nazywamy **konormą trójkątną** (w skrócie t-konormą), gdy dla każdych $x, y, z, y_1, y_2 \in [0,1]$ spełnione są następujące warunki:

(S1) $S(x,y) = S(y,x)$, (**przemienność**)

(S2) $S(x, S(y,z)) = S(S(x,y),z)$, (**łączność**)

(S3) $y_1 \leq y_2 \Rightarrow S(x,y_1) \leq S(x,y_2)$, (**monotoniczność**)

(S4) $S(x,0) = x$. (**element neutralny 0**)

Definicja 1.29 ([6, Definition 2.2.2])**.** T-konormę S nazywamy

1. **archimedesową**, jeśli dla dowolnych $x, y \in (0,1)$ istnieje takie $n \in \mathbb{N}$, że
$$x_S^{[n]} > y;$$

2. **ścisłą**, jeśli jest ciągła oraz dla dowolnych $x \in (0,1]$ i $y_1, y_2 \in [0,1]$
$$y_1 < y_2 \Rightarrow S(x,y_1) < S(x,y_2);$$

3. **nilpotentną**, jeśli jest ciągła oraz każdy $x \in (0,1)$ jest elementem nilpotentnym S, czyli gdy istnieje takie $n \in \mathbb{N}$, że $x_S^{[n]} = 1$;

4. **idempotentną**, jeśli każdy $x \in [0,1]$ jest elementem idempotentnym S, czyli gdy $S(x,x) = x$ dla każdego $x \in [0,1]$.

Uwaga 1.30 ([6, Remark 2.2.5])**.** 1. Jeśli t-konorma S jest ciągła, to jest archimedesowa wtedy i tylko wtedy, gdy
$$S(x,x) > x, \qquad x \in (0,1).$$

2. Jeśli t-konorma S jest ścisła lub nilpotentna, to jest archimedesowa.

3. Niech S będzie t-konormą, wtedy
$$S_{\mathbf{M}}(x,y) \leq S(x,y) \leq S_{\mathbf{D}}(x,y), \quad x, y \in [0,1].$$

Przykład 1.31. W tabeli 1.5 podajemy przykłady najważniejszych t-konorm wraz z ich najważniejszymi własnościami (por. [34]).

Twierdzenie 1.32 ([6, Theorem 2.2.6])**.** *Dla funkcji* $S\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ *następujące warunki są równoważne:*

1. *S jest t-konormą ciągłą archimedesową.*

t-konorma	wzór	własności
Maximum	$S_{\mathbf{M}}(x,y) = \max(x,y)$	ciągła, idempotentna
Łukasiewicza	$S_{\mathbf{LK}}(x,y) = \min(x+y,1)$	nilpotentna
Produktowa	$S_{\mathbf{P}}(x,y) = x+y-x\cdot y$	ścisła
Drastyczna	$S_{\mathbf{D}}(x,y) = \begin{cases} 1, & x,y \in (0,1] \\ \max(x,y), & \text{w pp.} \end{cases}$	archimedesowa, nieciągła
Nilpotentne maximum	$S_{\mathbf{nM}}(x,y) = \begin{cases} 1, & x+y \geq 1 \\ \max(x,y), & \text{w pp.} \end{cases}$	ciągła lewostronnie

Tabela 1.5: Przykłady t-konorm wraz z ich głównymi własności

2. *S ma ciągły addytywny generator, tzn. istnieje taka funkcja ciągła ściśle rosnąca $g\colon [0,1] \to [0,\infty]$ spełniająca $g(0) = 0$, która jest jednoznaczna z dokładnością do mnożenia przez stałą dodatnią, że*

$$S(x,y) = g^{(-1)}(g(x)+g(y)), \qquad x,y \in [0,1],$$

gdzie funkcję $g^{(-1)}$ nazywamy pseudo odwrotnością funkcji g określoną wzorem

$$g^{(-1)}(x) = \begin{cases} g^{-1}(x), & x \in [0,g(1)], \\ 1, & x \in (g(1),\infty]. \end{cases}$$

Uwaga 1.33 ([6, Remark 2.2.7])**.** 1. Powyższą reprezentację t-konormy ciągłej archimedesowej możemy zapisać w następujący sposób

$$S(x,y) = g^{-1}(\min(g(x)+g(y), g(1))), \qquad x,y \in [0,1].$$

2. S jest t-konormą ścisłą wtedy i tylko wtedy, gdy każdy addytywny generator g t-konormy S spełnia warunek $g(1) = \infty$.

3. S jest t-konormą nilpotentną wtedy i tylko wtedy, gdy każdy addytywny generator g t-konormy S spełnia warunek $g(1) < \infty$.

Przykład 1.34. Generatorem addytywnym t-konormy produktowej $S_{\mathbf{P}}$ i t-konormy Łukasiewicza $S_{\mathbf{LK}}$ są odpowiednio funkcje $g(x) = -\ln(1-x)$ i $g(x) = x$.

Twierdzenie 1.35 ([34, Proposition 1.15])**.** *Dla funkcji $S\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ następujące warunki są równoważne:*

1. *S jest t-konormą.*

2. *Istnieje taka t-norma T, że*

$$S(x,y) = 1 - T(1-x, 1-y), \qquad x,y \in [0,1].$$

Tak zdefiniowaną t-konormę nazywamy t-konormą dualną do t-normy T. Ponadto t-norma T jest ciągła (archimedesowa, ścisła, nilpotentna, idempotentna) wtedy i tylko wtedy, gdy t-konorma S jest ciągła (archimedesowa, ścisła, nilpotentna, idempotentna).

Twierdzenie 1.36 ([34, Corollary 5.12]). *Dla funkcji $S\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ następujące warunki są równoważne:*

1. *S jest t-konormą ciągłą.*

2. *S jest sumą porządkową t-konorm ciągłych archimedesowych, czyli istnieje jedyny zbiór przeliczalny A, jedyna rodzina parami rozłącznych otwartych podprzedziałów $J = \{(a_\alpha, b_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ przedziału $[0,1]$ i jedyna rodzina takich t-konorm ciągłych archimedesowych $(S_\alpha)_{\alpha \in A}$, że*

$$S(x,y) = \begin{cases} a_\alpha + (b_\alpha - a_\alpha) S_\alpha\left(\frac{x-a_\alpha}{b_\alpha - a_\alpha}, \frac{y-a_\alpha}{b_\alpha-a_\alpha}\right), & x, y \in [a_\alpha, b_\alpha], \\ \max(x,y), & \textit{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Zapisujemy $S = (\langle a_\alpha, b_\alpha, S_\alpha \rangle)_{\alpha \in A}$, natomiast t-konormy S_α nazywamy członami t-konormy S. W przypadku, gdy $J = \{[0,1]\}$, to funkcja S jest t-konormą ciągłą archimedesową. W przypadku, gdy $J = \emptyset$, to suma porządkowa sprowadza się do funkcji $\max(x,y)$. W szczególności zbiór idempotentów S jest równy $[0,1] \setminus \bigcup\limits_{\alpha \in A} (a_\alpha, b_\alpha)$.

1.7 Klasy implikacji rozmytych

W literaturze można znaleźć wiele klas implikacji rozmytych które odgrywają ważną role w charakteryzacji i w zastosowaniach implikacji rozmytych. Jedną z takich klas jest klasa (S,N)-implikacji. (S,N)-implikacje są uogólnieniem klasycznej tautologii

$$p \to q \equiv \neg p \vee q,$$

w logice rozmytej.

Definicja 1.37 ([6, Definition 2.4.1]). Funkcję $I\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ nazywamy **(S,N)-implikacją**, jeśli istnieje taka t-konorma S i negacja rozmyta N, że

$$I(x,y) = S(N(x), y), \qquad x, y \in [0,1].$$

(S,N)-implikacje generowane z t-konormy S oraz negacji rozmytej N oznaczamy przez $I_{S,N}$. Zbiór (S,N)-implikacji oznaczamy przez $\mathbb{I}_{\mathbb{S},\mathbb{N}}$.

t-konorma S	negacja N	(S,N)-implikacja $I_{S,N}$
$S_{\mathbf{M}}$	$N_{\mathbf{C}}$	$I_{\mathbf{KD}}$
$S_{\mathbf{LK}}$	$N_{\mathbf{C}}$	$I_{\mathbf{LK}}$
$S_{\mathbf{P}}$	$N_{\mathbf{C}}$	$I_{\mathbf{RC}}$
$S_{\mathbf{nM}}$	$N_{\mathbf{C}}$	$I_{\mathbf{FD}}$
dowolne S	$N_{\mathbf{D1}}$	$I_{\mathbf{D}}$
dowolne S	$N_{\mathbf{D2}}$	$I_{\mathbf{WB}}$

Tabela 1.6: Przykłady (S,N)-implikacji

Przykład 1.38. W tabeli 1.6 podajemy przykłady najważniejszych (S,N)-implikacji (por. [6]).

Następną ważna klasą implikacji jest klasa R-implikacji, która jest uogólnieniem następującej równości z klasycznej teorii mnogości

$$A' \cup B = (A \setminus B)' = \bigcup \{C \subseteq X \mid A \cap C \subseteq B\},$$

gdzie $A, B \subseteq X$ dla pewnego niepustego zbioru X, w logice rozmytej.

Definicja 1.39 ([6, Definition 2.5.1])**.** Funkcję $I\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ nazywamy **R-implikacją** (**implikacją indukowaną**) jeśli istnieje taka t-norma T, że

$$I(x,y) = \sup\{t \in [0,1] \mid T(x,t) \leq y\}, \qquad x, y \in [0,1].$$

R-implikację generowaną z t-normy T oznaczamy przez I_T. Zbiór wszystkich R-implikacji oznaczamy przez $\mathbb{I}_{\mathbb{T}}$.

t-norma T	R-implikacja I_T
$T_{\mathbf{M}}$	$I_{\mathbf{GD}}$
$T_{\mathbf{LK}}$	$I_{\mathbf{LK}}$
$T_{\mathbf{P}}$	$I_{\mathbf{GG}}$
$T_{\mathbf{D}}$	$I_{\mathbf{WB}}$
$T_{\mathbf{nM}}$	$I_{\mathbf{FD}}$

Tabela 1.7: Przykłady R-implikacji

Przykład 1.40. W tabeli 1.7 podajemy przykłady najważniejszych R-implikacji (por. [6]).

Będziemy też mieli do czynienia z implikacjami generowanymi z funkcji jednej zmiennej. Jednymi z najpopularniejszych klas tego typu są klasy zaprooponowane przez Yagera w pracy [54], zdefiniowane następująco.

Definicja 1.41 ([6, Definition 3.1.1])**.** Niech $f\colon [0,1] \to [0,\infty]$ będzie funkcją ciągłą ściśle malejącą spełniającą warunek $f(1) = 0$. Funkcję $I\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ określoną następująco:

$$I(x,y) = f^{-1}(x \cdot f(y)), \qquad x, y \in [0,1],$$

przyjmując $0 \cdot \infty = 0$, nazywamy **implikacją f-generowaną Yagera**.

Definicja 1.42 ([6, Definition 3.2.1])**.** Niech $g\colon [0,1] \to [0,\infty]$ będzie funkcją ciągłą ściśle rosnącą spełniającą warunek $g(0) = 0$. Funkcję $I\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ określoną następująco:

$$I(x,y) = g^{(-1)}\left(\frac{1}{x} g(y)\right), \qquad x, y \in [0,1],$$

przyjmując $0 \cdot \infty = \infty$ i $\frac{1}{0} = \infty$, nazywamy **implikacją g-generowaną Yagera**, gdzie funkcja $g^{(-1)}$ jest pseudo odwrotnością określoną następującą:

$$g^{(-1)}(x) = \begin{cases} g^{-1}(x), & x \in [0, g(1)], \\ 1, & x \in [g(1), \infty]. \end{cases}$$

Stosujemy następujące oznaczenia:

- $\mathbb{I}_{\mathbb{F},\infty}$ -rodzina wszystkich takich f-generowanych implikacji, że $f(0) = \infty$;
- $\mathbb{I}_{\mathbb{F},\aleph}$ -rodzina wszystkich takich f-generowanych implikacji, że $f(0) < \infty$;
- $\mathbb{I}_{\mathbb{F}} = \mathbb{I}_{\mathbb{F},\aleph} \cup \mathbb{I}_{\mathbb{F},\infty}$ -rodzina wszystkich f-generowanych implikacji;
- $\mathbb{I}_{\mathbb{G},\infty}$ -rodzina wszystkich takich g-generowanych implikacji, że $g(1) = \infty$;
- $\mathbb{I}_{\mathbb{G},\aleph}$ -rodzina wszystkich takich g-generowanych implikacji, że $g(1) < \infty$;
- $\mathbb{I}_{\mathbb{G}} = \mathbb{I}_{\mathbb{G},\aleph} \cup \mathbb{I}_{\mathbb{G},\infty}$ -rodzina wszystkich g-generowanych implikacji;

Przy powyższych oznaczeniach zachodzi następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.43 ([6, Proposition 4.4.1])**.** *Zachodzą następujące równości:*

$$\mathbb{I}_{\mathbb{F},\aleph} \cap \mathbb{I}_{\mathbb{G}} = \emptyset, \quad \mathbb{I}_{\mathbb{F}} \cap \mathbb{I}_{\mathbb{G},\aleph} = \emptyset, \quad \mathbb{I}_{\mathbb{F},\infty} = \mathbb{I}_{\mathbb{G},\infty}.$$

Przykład 1.44. Przykładem implikacji f-generowanej Yagera jest implikacja Reichenbacha $I_{\mathbf{RC}}$ o generatorze $f(x) = 1 - x$. Przykładem implikacji g-generowanej Yagera jest implikacja Goguena o generatorze $g(x) = x$.

Implikacje f-generowane i g-generowane nazywamy implikacjami Yagera. Następujące cztery twierdzenia charakteryzują implikacje Yagera i będą wykorzystane później.

Twierdzenie 1.45 ([42, Theorem 6])**.** *Dla funkcji $I\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ następujące warunki są równoważne:*

(i) I jest taką implikacją f-generowaną Yagera, że $f(0) < \infty$.

(ii) I spełnia prawo importacji z produktową t-normą $T_p(x,y) = x \cdot y$ (to znaczy, że $I(x, I(y,z)) = I(xy, z)$ dla dowolnych $x, y, z \in [0,1]$) oraz naturalna negacja N_I jest ciągłą negacją rozmytą.

Prawo importacji omówimy szerzej w rozdziale piątym.

Twierdzenie 1.46 ([42, Theorem 12])**.** *Dla funkcji $I\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ następujące warunki są równoważne:*

(i) I jest taką implikacją f-generowaną Yagera, że $f(0) = \infty$.

(ii) I spełnia prawo importacji z t-normą produktową $T_p(x,y) = x \cdot y$, I jest ciągła wszędzie z wyjątkiem punktu $(0,0)$ oraz $I(x,y) = 1 \Leftrightarrow x = 0$ lub $y = 1$.

Twierdzenie 1.47 ([42, Theorem 17])**.** *Dla funkcji $I\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ następujące warunki są równoważne:*

(i) I jest taką implikacją g-generowaną Yagera, że $g(1) < \infty$.

(ii) I spełnia prawo importacji z t-normą produktową $T_p(x,y) = x \cdot y$ oraz istnieje taka ciągła ściśle rosnąca funkcja $t\colon [0,1] \to [0,1]$, że $I(x,y) = 1 \Leftrightarrow y \geq t(x)$.

Twierdzenie 1.48 ([42, Theorem 14]). *Dla funkcji $I\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ następujące warunki są równoważne:*

(i) I jest taką implikacją g-generowaną Yagera, że $g(1) = \infty$.

(ii) I spełnia prawo importacji z t-normą produktową $T_p(x,y) = x \cdot y$, I jest ciągła wszędzie z wyjątkiem punktu $(0,0)$ oraz $I(x,y) = 1 \Leftrightarrow x = 0$ lub $y = 1$.

Jeszcze jedną ważną klasę funkcji są QL-operacje. QL-operacje są uogólnieniem klasycznej tautologii

$$p \to q \equiv \neg p \vee (p \wedge q),$$

w logice rozmytej.

Definicja 1.49 ([6, Definition 2.6.1]). Funkcję $I\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ nazywamy **QL-operacją**, jeśli istnieje taka t-konorma S, negacja rozmyta N i t-norma T, że

$$I(x,y) = S(N(x), T(x,y)), \quad x, y \in [0,1].$$

QL-operację generowaną z t-normy T, t-konormy S i negacji rozmytej N będziemy oznaczać przez $I_{T,S,N}$. Zbiór wszystkich QL-operacji oznaczmy przez $\mathbb{I}_{\mathbb{QL}}$.

Ważne, że QL-operatory nie zawsze musi być implikacją rozmytą. Niech $S = S_{\mathbf{M}}$, $N = N_{\mathbf{D1}}$ i $T = T_{\mathbf{P}}$. Wtedy funkcja $I(x,y) = \max(N(x), x\dot{y}) \in \mathbb{I}_{\mathbb{QL}}$, ale nie jest implikacją rozmytą ponieważ $\frac{1}{3} = I(\frac{1}{3}, 1) < I(\frac{1}{2}, 1) = \frac{1}{2}$.

t-norma T	t-konorma S	negacja N	QL-operator $I_{T,S,N}$
$T_{\mathbf{LK}}$	$S_{\mathbf{LK}}$	$N_{\mathbf{C}}$	$I_{\mathbf{KD}}$
$T_{\mathbf{P}}$	$S_{\mathbf{LK}}$	$N_{\mathbf{C}}$	$I_{\mathbf{RC}}$
$T_{\mathbf{M}}$	$S_{\mathbf{LK}}$	$N_{\mathbf{C}}$	$I_{\mathbf{LK}}$
$T_{\mathbf{M}}$	$S_{\mathbf{nM}}$	$N_{\mathbf{C}}$	$I_{\mathbf{FD}}$
dowolne T	dowolne S	$N_{\mathbf{D2}}$	$I_{\mathbf{WB}}$

Tabela 1.8: Przykłady QL-operacji

Przykład 1.50. W tabeli 1.8 podajemy przykłady najważniejszych QL-operacji (por. [6]).

Przykład 1.51. W tabeli 1.9 podajemy przykłady najważniejszych implikacji rozmytych wraz z informacja, do której klasy należa.(por. [6]).

1.8 Kopuły, semikopuły, quasikopuły

Następujący podrozdział poświęcamy na zdefiniowanie kopuł, semikopuł, quasikopuł oraz przedstawienie kilka ważnych twierdzeń dla tych funkcji. Często w literaturze kopułę definiuje się jako funkcje postaci $C\colon [0,1]^N \to [0,1]$, gdzie $N = 1, 2, \ldots$. My tylko się ograniczymy do kopuł dwóch zmiennych.

Definicja 1.52 ([49, Definition 2.2.2]). Funkcję $C\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ nazywamy **kopułą**, gdy spełnia poniższe warunki:

implikacja rozmyta	$\mathbb{I}_{\mathbb{T}}$	$\mathbb{I}_{\mathbb{S},\mathbb{N}}$	$\mathbb{I}_{\mathbb{F}}$	$\mathbb{I}_{\mathbb{G}}$	$\mathbb{I}_{\mathbb{QL}}$
$I_{\mathbf{LK}}$	$\surd$	$\surd$	$\times$	$\times$	$\surd$
$I_{\mathbf{GD}}$	$\surd$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
$I_{\mathbf{GG}}$	$\surd$	$\times$	$\times$	$\surd$	$\times$
$I_{\mathbf{RC}}$	$\times$	$\surd$	$\surd$	$\times$	$\surd$
$I_{\mathbf{GR}}$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
$I_{\mathbf{KD}}$	$\times$	$\surd$	$\times$	$\times$	$\surd$
$I_{\mathbf{D}}$	$\times$	$\surd$	$\times$	$\times$	$\times$
$I_{\mathbf{WB}}$	$\surd$	$\surd$	$\times$	$\times$	$\surd$
$I_{\mathbf{FD}}$	$\surd$	$\surd$	$\times$	$\times$	$\surd$

Tabela 1.9: Przykłady implikacji rozmytych

(C1) $C(x,0) = C(0,y) = 0$, dla wszystkich $x, y \in [0,1]$,

(C2) $C(x,1) = x$, dla wszystkich $x \in [0,1]$,

(C3) $C(1,y) = y$, dla wszystkich $y \in [0,1]$,

(C4) dla wszystkich takich $x_1, x_2, y_1, y_2 \in [0,1]$, że $x_1 \leq x_2, y_1 \leq y_2$ zachodzi

$$C(x_2,y_2) - C(x_2,y_1) - C(x_1,y_2) + C(x_1,y_1) \geq 0.$$

Rodzinę wszystkich kopuł oznaczamy przez $\mathcal{C}$.

Przykład 1.53. Poniżej przedstawiamy wybrane przykłady kopuł występujące w literaturze:

1. $C(x,y) = M(x,y) = \min(x,y)$.

2. $C(x,y) = W(x,y) = \max(x+y-1,0)$.

3. $C(x,y) = \Pi(x,y) = x \cdot y$.

4. Produkt Hamachera $C_{\mathbf{H}}$:

$$C_{\mathbf{H}}(x,y) = \begin{cases} 0, & (x,y) = (0,0) \\ \frac{xy}{x+y-xy}, & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}.$$

5. Rodzina Farlie'a-Gumbela-Morgensterna, FGM(θ), gdzie $\theta \in [-1,1]$:

$$C_\theta(x,y) = x \cdot y + \theta x \cdot y(1-x)(1-y).$$

6. Rodzina Claytona, gdzie $\theta \in [-1,\infty) \setminus \{0\}$:

$$C_\theta(x,y) = \left[\max(x^{-\theta} + y^{-\theta} - 1, 0)\right]^{\frac{-1}{\theta}}.$$

7. Rodzina Cuadras-Augé'a, gdzie $\alpha, \beta \in [0,1]$:

$$C_{\alpha,\beta}(x,y) = \min(x^{1-\alpha}y, xy^{1-\beta}).$$

8. Rodzina kopuł $C_{np,\alpha}$ nieprzemiennych, $\alpha \in (1, \infty)$:
$$C_{np,\alpha}(x,y) = xy + x^\alpha y(1-x)(1-y).$$

Definicja 1.54 ([21]). Funkcję $Q\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ która spełnia warunki (**C1**)-(**C3**) oraz

(C4') dla wszystkich takich $x_1, x_2, y_1, y_2 \in [0,1]$, że $x_1 \le x_2, y_1 \le y_2$ zachodzi
$$Q(x_2,y_2) - Q(x_2,y_1) - Q(x_1,y_2) + Q(x_1,y_1) \ge 0,$$
gdzie co najmniej jedna z $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \{0,1\}$,

nazywamy **quasikopułą**. Rodzinę wszystkich quasikopuł oznaczamy przez $\mathcal{QC}$.

Oczywiście każda kopuła jest quasikopułą. Warto zauważyć ([21, Proposition 3]), że warunek (**C4'**) jest równoważny z faktem, że funkcja $Q\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ jest niemalejąca na każdą ze zmiennych, czyli dla wszystkich takich $x_1, x_2, y_1, y_2 \in [0,1]$, że $x_1 \le x_2, y_1 \le y_2$
$$Q(x_1,y_1) \le Q(x_2,y_2), \tag{ND}$$
i spełnia warunek Lipschitza ze stałą równą 1, czyli
$$|Q(x_1,y_1) - Q(x_2,y_2)| \le |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|, \tag{Lip}$$
dla wszystkich $x_1, x_2, y_1, y_2 \in [0,1]$.

W konsekwencji każda kopuła także spełnia warunek (Lip), zatem jest funkcją ciągłą. Quasikopuły nie będące kopułami nazywamy **właściwymi quasikopułami**. Następujący przykład pokazuje, że właściwe quasikopuły istnieją.

Przykład 1.55 ([49, Example 6.3]). Rozważmy rodzinę kopuł $(C_\theta)_{\theta\in(0,1)}$ określoną wzorem
$$C_\theta(x,y) = \begin{cases} \max(0, x+y-\theta), & (x,y) \in [0,\theta]^2 \\ \max(\theta, x+y-1), & (x,y) \in (\theta,1]^2 \\ M(x,y), & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$
Wtedy funkcja Q jest właściwą quasikopułą
$$Q(x,y) = \max\{C_{\frac{1}{3}}(x,y), C_{\frac{2}{3}}(x,y)\}, \qquad x, y \in [0,1].$$

Definicja 1.56 ([17, Definition 2.1]). Funkcję $B\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ nazywamy **semikopułą**, jeśli spełnia warunki (**C2**), (**C3**) i (ND). Rodzinę wszystkich semikopuł oznaczamy przez $\mathcal{SC}$.

Z definicji otrzymujemy
$$0 \le B(x,0) \le B(1,0) = 0,$$
$$0 \le B(0,y) \le B(0,1) = 0,$$
to dowodzi, że każda semikopuła spełnia warunek (**C1**). Przykładem semikopuły nie będącej quasikopuła jest t-norma $T_{\mathbf{D}}$, co w połączeniem z przykładem 1.55 dowodzi, że
$$\mathcal{C} \subsetneq \mathcal{QC} \subsetneq \mathcal{SC}.$$

Definicja 1.57 ([17, Definition 2.1])**.** Semikopułę B nazywamy:

1. **przemienną**, gdy $\forall_{x,y\in[0,1]} \quad B(x,y) = B(y,x)$;
2. **łączną**, gdy $\forall_{x,y,z\in[0,1]} \quad B(x, B(y,z)) = B(B(x,y),z)$;
3. **idempotentną**, jeśli każdy $x \in [0,1]$ jest elementem idempotentnym B, czyli gdy $B(x,x) = x$ dla każdego $x \in [0,1]$.

W przypadku kiedy semikopuła B jest kopułą, wówczas kopułę B nazywamy:

4. **archimedesową**, gdy jest kopułą łączną spełniającą warunek $B(x,x) < x$, dla każdego $x \in (0,1)$;
5. **ścisłą**, jeśli jest kopułą łączną spełniającą dla dowolnych $x \in (0,1]$ i $y_1, y_2 \in [0,1]$ warunek
$$y_1 < y_2 \Rightarrow B(x,y_1) < B(x,y_2);$$
6. **nilpotentną**, jeśli jest kopułą łączną oraz każdy $x \in (0,1)$ jest elementem nilpotentnym B, czyli gdy istnieje takie $n \in \mathbb{N}$, że $x_B^{[n]} = 0$.

Wprost z definicji kopuły, semikopuły i quasikopuły otrzymujemy następujące fakty.

Uwaga 1.58 ([17])**.** (i) Semikopuła, która jest 2 rosnąca, czyli spełnia warunek (**C4**), jest kopułą.

(ii) Semikopuła, która spełnia warunek 1-Lipschitza jest quasikopułą.

(iii) Semikopuła, która jest przemienna i łączna jest t-normą.

Semikopuły, quasikopuły i kopuły są domknięte na kombinacje wypukłe.

Twierdzenie 1.59 ([49])**.** *Jeśli $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ (odpowiednio $\mathcal{SC}$ i $\mathcal{QC}$) i $\lambda \in [0,1]$, to $\lambda C_1 + (1-\lambda)C_2 \in \mathcal{C}$ (odpowiednio $\mathcal{SC}$ i $\mathcal{QC}$).*

Można pokazać (patrz [17, Proposition 2.1]), że każda semikopuła jest ograniczona, czyli dla każdej semikopuły B i dla każdych $x, y \in [0,1]$ zachodzą następujące nierówności
$$T_{\mathbf{D}}(x,y) \leq B(x,y) \leq T_{\mathbf{M}}(x,y).$$
Podobnie dla każdej kopuły (quasikopuły) C (zobacz [49]), dla każdych $x, y \in [0,1]$ zachodzą następujące nierówności (**Frécheta-Hoeffdinga ograniczenia**)
$$W(x,y) \leq C(x,y) \leq M(x,y).$$

Twierdzenie 1.60 ([47, Theorem 2.1])**.** *Niech A będzie przeliczanym zbiorem, niech $\{(a_\alpha, b_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ będzie rodziną podprzedziałów przedziału $[0,1]$ oraz niech $(C_\alpha)_{\alpha\in A}$ będzie rodziną kopuł (quasikopuł, semikopuł). Wtedy funkcja $C = (\langle a_\alpha, b_\alpha, C_\alpha\rangle)_{\alpha\in A}$ określona następująco:*
$$C(x,y) = \begin{cases} a_\alpha + (b_\alpha - a_\alpha) C_\alpha\left(\frac{x-a_\alpha}{b_\alpha-a_\alpha}, \frac{y-a_\alpha}{b_\alpha-a_\alpha}\right), & x,y \in [a_\alpha, b_\alpha], \\ \min(x,y), & \textit{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$
jest kopułą (quasikopułą, semikopułą). Funkcję $(\langle a_\alpha, b_\alpha, C_\alpha\rangle)_{\alpha\in A}$ nazywamy sumą porządkową kopuł (quasikopuł, semikopuł). W przypadku, gdy $A = \emptyset$, to suma porządkowa sprowadza się do funkcji $\min(x,y)$. W szczególności zbiór idempotentów C jest równy $[0,1] \setminus \bigcup_{\alpha\in A} (a_\alpha, b_\alpha)$.

Twierdzenie 1.61 ([34, Theorem 2.43]). *Każda kopuła łączna (jako topologiczna semigrupa) jest przemienna, w szczególności każda kopuła łączna jest t-normą ciągła.*

Z powyższego twierdzenia i z twierdzenia 1.27 wynika, że każda łączna kopuła jest sumą porządkową kopuł archimedesowych. Natomiast, nie każda funkcja postaci (1.1) jest kopułą.

Twierdzenie 1.62 ([49, Theorem 4.1.4]). *Funkcja T postaci* (1.1) *jest kopułą wtedy i tylko wtedy, gdy f jest funkcją wypukłą.*

Twierdzenie 1.63 ([48, Theorem 3.1]). *T-norma T jest kopułą wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia warunek Lipschitza ze względu na pierwszą zmienną:*

$$T(x_2, y) - T(x_1, y) \leq x_2 - x_1, \qquad \text{dla takich } x_1, x_2, y \in [0,1], \quad \text{że } x_1 \leq x_2.$$

W dalszej części pracy będziemy wykonywać następujące operacje na funkcjach postaci $F\colon [0,1]^2 \to [0,1]$.

Definicja 1.64. Niech F będzie funkcją postaci $F\colon [0,1]^2 \to [0,1]$. Definiujemy operacje $F^t, \widehat{F}, F^*, \overline{F}, \tilde{F}\colon [0,1]^2 \to [0,1]$, dla dowolnych $x, y \in [0,1]$ następująco:

1. $F^t(x,y) = F(y,x)$;
2. $\widehat{F}(x,y) = x + y - F(x,y)$;
3. $\overline{F}(x,y) = 1 - F(1-x, 1-y)$;
4. $F^*(x,y) = \widehat{\overline{F}}(x,y) = \overline{\widehat{F}}(x,y) = x + y - 1 + F(1-x, 1-y)$;
5. $\tilde{F}(x,y) = \left(\widehat{\overline{F}}\right)^t(x,y) = \widehat{\overline{(F^t)}}(x,y) = x + y - 1 + F(1-y, 1-x)$;

Warto zauważyć, że wykorzystując powyższą definicję t-konormę S dualną do t-normy T można zapisać w postaci $\overline{\widehat{T}}$.

Lemat 1.65. *Wszystkie operacje określone w definicji 1.64 są inwolucjami.*

Dowód. Ustalmy dowolne $x, y \in [0,1]$. Otrzymujemy

$\left(F^t\right)^t(x,y) = F^t(y,x) = F(x,y)$;

$\widehat{\widehat{F}}(x,y) = (x + \widehat{y - F}(x,y)) = x + y - (x + y - F(x,y)) = F(x,y)$;

$\overline{\overline{F}}(x,y) = \overline{1 - F(1-x, 1-y)} = 1 - (1 - F(x,y)) = F(x,y)$;

$\left(F^*\right)^*(x,y) = \widehat{\overline{\widehat{\overline{F}}}}(x,y) = \overline{\overline{F}}(x,y) = F(x,y)$;

$\tilde{\tilde{F}}(x,y) = \left(\widehat{\overline{\widehat{\overline{F^t}}}}\right)^t(x,y) = (F^t)^t(x,y) = F(x,y).$ □

Lemat 1.66. *Niech C będzie kopułą. Wtedy funkcje $C^t, C^*, \tilde{C}$ są kopułami.*

Dowód. Wprost z definicji 1.64 otrzymujemy, że C^t jest kopułą. Pokażemy, że funkcja C^* spełnia warunki (**C1-C4**), czyli jest kopułą.

(C1) $C^*(x,0) = x - 1 + C(1-x,1) = 0 = y - 1 + C(1,1-y) = C^*(0,y)$, dla wszystkich $x, y \in [0,1]$,

(C2) $C^*(x,1) = x + 1 - 1 + C(1-x,0) = x$, dla wszystkich $x \in [0,1]$,

(C3) $C^*(1,y) = 1 + y - 1 + C(0,1-y) = y$, dla wszystkich $y \in [0,1]$,

(C4) Niech $x_1, x_2, y_1, y_2 \in [0,1]$ będą takie, że $x_1 \le x_2, y_1 \le y_2$. Wtedy,

$$\begin{aligned}
&C^*(x_2,y_2) - C^*(x_2,y_1) - C^*(x_1,y_2) + C^*(x_1,y_1) \ge 0 \iff \\
&x_2 + y_2 - 1 + C(1-x_2,1-y_2) - x_2 - y_1 + 1 - C(1-x_2,1-y_1) \\
&\ - x_1 - y_2 + 1 - C(1-x_1,1-y_2) + x_1 + y_1 - 1 + C(1-x_1,1-y_1) \ge 0 \iff \\
&C(x'_2,y'_2) - C(x'_2,y'_1) - C(x'_1,y'_2) + C(x'_1,y'_1) \ge 0
\end{aligned}$$

gdzie $x'_1 = 1 - x_2$, $x'_2 = 1 - x_1$, $y'_1 = 1 - y_2$ i $y'_1 = 1 - y_2$, stąd $x'_2 \le x'_1, y'_2 \le y'_1$.

$\tilde{C}$ jest kopułą ponieważ $\tilde{C} = (C^*)^t$. □

Lemat 1.67. *Niech $F_1 \colon [0,1]^2 \to [0,1]$ i $F_2 \colon [0,1]^2 \to [0,1]$ będą dowolnymi funkcjami i niech $\lambda \in [0,1]$. Wtedy*

$$(\lambda F_1 + (1-\lambda)F_2)^* = \lambda {F_1}^* + (1-\lambda){F_2}^* \quad i \quad (\lambda F_1 \widetilde{+ (1-} \lambda)F_2) = \lambda \tilde{F_1} + (1-\lambda)\tilde{F_2},$$

czyli operacje $*, \tilde{}$ zachowują kombinacje wypukłą.

Dowód. Zauważmy wpierw, że operacje 1, 2, 3 z definicji 1.64 zachowują kombinacje wypukłą. Istotnie w przypadku operacji ^{t} teza oczywista. Dla drugiej otrzymujemy

$$\begin{aligned}
&(\lambda F_1(x,y) \widehat{+ (1-} \lambda)F_2(x,y)) = x + y - (\lambda F_1(x,y) + (1-\lambda)F_2(x,y)) \\
&= \lambda(x + y - F_1(x,y)) + (1-\lambda)(x + y - F_2(x,y)) \\
&= \lambda \widehat{F_1(x,y)} + (1-\lambda)\widehat{F_2(x,y)}.
\end{aligned}$$

Następnie dla trzeciej otrzymujemy

$$\begin{aligned}
&\overline{(\lambda F_1(x,y) + (1-\lambda)F_2(x,y))} = 1 - (\lambda F_1(1-x,1-y) + (1-\lambda)F_2(1-x,1-y)) \\
&= \lambda(1 - F_1(1-x,1-y)) + (1-\lambda)(1 - F_2(1-x,1-y)) \\
&= \lambda \overline{F_1(x,y)} + (1-\lambda)\overline{F_2(x,y)}.
\end{aligned}$$

Z definicji 1.64 otrzymujemy tezę. □

Z powyższego lematu wynika, że funkcją C^* jest kopułą, gdy C jest kopułą.

Definicja 1.68 ([49, str. 32])**.** Niech C będzie kopułą. Funkcję $C^* \colon [0,1]^2 \to [0,1]$ określoną następująco

$$C^*(x,y) = x + y - 1 + C(1-x,1-y), \qquad x, y \in [0,1],$$

nazywamy **kopułą dualną** (ang. *survival copula*) do kopuły C.

Następny rozdział jest poświęcony na znalezieniu kopuł C spełniających równanie $C^* = C$. Przykładami takich kopuł są M, Π, W. Przykładem kopuły niełącznej o tej własności są kopuły z rodziny FGM (por. [26]). Przykładem kopuły nie spełniającej to równanie jest produkt Hamachera $C_{\mathbf{H}}$.

Rozdział 2

Równanie Franka

Obecny rozdział poświęcimy na przedstawienie rozwiązania poniższego równania funkcyjnego:

$$C(x,y) + 1 - C(1-x, 1-y) = x + y, \qquad x, y \in [0,1], \tag{2.1}$$

gdzie $C\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ jest kopułą. W tym celu posłużymy się rozwiązaniem równania Franka [20]. Rozwiązanie równania Franka jest rzadko prezentowane w monografiach, ale t-normy Franka, które są rozwiązaniem równania Franka, są dość często przytaczane w wielu pracach. Ponadto okazuje się, że wiele równań dla kopuł wynikających z odpowiednich własności dla implikacji s-probabilistycznych można rozwiązać wykorzystując t-normy Franka. Dlatego też prezentujemy w tym rozdziale pełny dowód rozwiązania równania Franka.

2.1 Wprowadzenie do równania Franka

Przez równanie Franka rozumiemy następujące równanie funkcyjne:

$$T(x,y) + S(x,y) = x + y, \qquad x, y \in [0,1], \tag{RF}$$

gdzie $T\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ jest t-normą a $S\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ t-konormą.

Uwaga 2.1 (por. [34, Theorem 5.14])**.** Jeśli para funkcji (T,S) spełnia równanie (RF), to funkcje T i S są funkcjami ciągłymi.

Dowód. Niech $y \in [0,1]$. Przypuśćmy, że $x \in [0,1]$ jest takim punktem, że funkcja $T(\cdot, y)$ jest nieciągła w x lub funkcja $S(\cdot, y)$ nie jest ciągła w x. Jeśli $x > 0$ i $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest takim ciągiem, że $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ i $x_n < x$, dla każdego $n \in \mathbb{N}$, to wtedy

$$x + y = \lim_{n\to\infty}(x_n + y) = \lim_{n\to\infty}(T(x_n, y) + S(x_n, y)) < T(x,y) + S(x,y) = x + y,$$

otrzymujemy sprzeczność. Jeśli $x < 1$ i $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest takim ciągiem, że $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ i $x_n > x$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, to wtedy

$$x + y = \lim_{n\to\infty}(x_n + y) = \lim_{n\to\infty}(T(x_n, y) + S(x_n, y)) > T(x,y) + S(x,y) = x + y,$$

otrzymujemy sprzeczność. To dowodzi, że funkcje T i S są ciągłe wszędzie w $[0,1]$ ze względu na pierwszą zmienną. Analogicznie dowodzimy ciągłości ze względu na drugą zmienną. Stąd funkcje T i S są ciągłe wszędzie w $[0,1]^2$ na mocy twierdzenia 1.1. $\square$

Na mocy poprzedniej uwagi rozwiązań równania (RF) należy szukać wśród funkcji ciągłych. Na użytek obecnego rozdziału zbiór t-norm ciągłych będziemy oznaczać przez $\mathcal{T}$, a zbiór t-konorm ciągłych przez $\mathcal{S}$. Symbolem $\mathcal{T}_A$ będziemy oznaczać zbiór t-norm ciągłych archimedesowych, a symbolem $\mathcal{S}_A$ będziemy oznaczać zbiór t-konorm ciągłych archimedesowych. Oczywiście na mocy twierdzeń 1.27, 1.36 do zbioru $\mathcal{T}\setminus\mathcal{T}_A$ należą sumy porządkowe t-norm ciągłych archimedesowych, a do zbioru $\mathcal{S}\setminus\mathcal{S}_A$ należą sumy porządkowe t-konorm ciągłych archimedesowych.

Lemat 2.2. *Załóżmy, że para* (T, S) *jest rozwiązaniem równania* (RF). *Wówczas* $T \in \mathcal{T}_A$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $S \in \mathcal{S}_A$. *Ponadto* $T \in \mathcal{T}\setminus\mathcal{T}_A$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $S \in \mathcal{S}\setminus\mathcal{S}_A$ *oraz zbiór idempotentów dla* T *i* S *jest taki sam.*

Dowód. Ustalmy dowolne $x \in [0, 1]$. Wstawiamy $y = x$ w równaniu (RF), wtedy

$$T(x, x) < x \Leftrightarrow 2x = T(x, x) + S(x, x) < x + S(x, x) \Leftrightarrow S(x, x) > x,$$

czyli $T \in \mathcal{T}_A \Leftrightarrow S \in \mathcal{S}_A$, stąd $T \in \mathcal{T}\setminus\mathcal{T}_A \Leftrightarrow S \in \mathcal{S}\setminus\mathcal{S}_A$. Ponownie ustalmy $x \in (0, 1)$ i wstawiamy $y = x$ w (RF), wtedy

$$T(x, x) = x \Leftrightarrow 2x = T(x, x) + S(x, x) = x + S(x, x) \Leftrightarrow S(x, x) = x,$$

czyli zbiór idempotentów dla T i S jest identyczny. □

Twierdzenie 2.3 ([20, Theorem 2.1]). *Para* (T, S) *jest rozwiązaniem równania* (RF) *wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi jeden z następujących warunków:*

(i) $T \in \mathcal{T}_A$ *i* $S \in \mathcal{S}_A$ *spełniają* (RF);

(ii) $T \in \mathcal{T}\setminus\mathcal{T}_A$, $S \in \mathcal{S}\setminus\mathcal{S}_A$ *i istnieje taki zbiór przeliczalny* A, *że*

$$T = (\langle a_\alpha, b_\alpha, T_\alpha\rangle)_{\alpha\in A} \text{ i } S = (\langle a_\alpha, b_\alpha, S_\alpha\rangle)_{\alpha\in A}$$

oraz (T_α, S_α) *spełniają* (RF) *dla dowolnych* $\alpha \in A$.

Dowód. Zauważmy wpierw, że gdy $T \in \mathcal{T}\setminus\mathcal{T}_A$ i $S \in \mathcal{S}\setminus\mathcal{S}_A$, to z poprzedniego lematu zbiór idempotentów dla T i S jest taki sam, czyli istnieje taki zbiór przeliczalny A, że dla $(x, y) \in [a_\alpha, b_\alpha]^2$, $\alpha \in A$, mamy

$$x+y = 2a_\alpha + (b_\alpha - a_\alpha)\left(\frac{x - a_\alpha}{b_\alpha - a_\alpha} + \frac{y - a_\alpha}{b_\alpha - a_\alpha}\right),$$

$$T(x, y) + S(x,y) = 2a_\alpha + (b_\alpha - a_\alpha)\left[T_\alpha\left(\frac{x - a_\alpha}{b_\alpha - a_\alpha}, \frac{y - a_\alpha}{b_\alpha - a_\alpha}\right) + S_\alpha\left(\frac{x - a_\alpha}{b_\alpha - a_\alpha}, \frac{y - a_\alpha}{b_\alpha - a_\alpha}\right)\right].$$

Wtedy równanie Franka (RF) zachodzi dla $(x, y) \in [a_\alpha, b_\alpha]^2$, $\alpha \in A$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$T_\alpha\left(\frac{x - a_\alpha}{b_\alpha - a_\alpha}, \frac{y - a_\alpha}{b_\alpha - a_\alpha}\right) + S_\alpha\left(\frac{x - a_\alpha}{b_\alpha - a_\alpha}, \frac{y - a_\alpha}{b_\alpha - a_\alpha}\right) = \frac{x - a_\alpha}{b_\alpha - a_\alpha} + \frac{y - a_\alpha}{b_\alpha - a_\alpha}. \tag{2.2}$$

W przypadku, gdy $A = \emptyset$, to $T = T_{\mathbf{M}}$ i $S = S_{\mathbf{M}}$ i stosujemy zależność $\min(x, y) + \max(x, y) = x + y$.

Załóżmy, że para (T, S) jest rozwiązaniem równania (RF). Wtedy albo funkcje (T, S) są archimedesowe i zachodzi (i) albo niearchimedesowe i wtedy $T \in \mathcal{T} \setminus \mathcal{T}_A$ i $S \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_A$. W drugim przypadku musi istnieć taki zbiór przeliczalny A, że para (T_α, S_α) spełnia (RF), dla dowolnego $\alpha \in A$. Istotnie, ponieważ funkcja $\varphi\colon [a_\alpha, b_\alpha] \to [0, 1]$ postaci

$$\varphi(t) = \frac{t - a_\alpha}{b_\alpha - a_\alpha},$$

jest bijekcją, z (2.2) otrzymujemy, że para (T_α, S_α) spełnia (RF).

Z drugiej strony, gdy zachodzi (i), to teza jest oczywista. Jeśli zachodzi (ii), to wykorzystując równanie (2.2) otrzymujemy tezę. □

Z powyższego twierdzenia wynika, że rozwiązanie (RF) sprowadza się do poniższego rozwiązania równania funkcyjnego:

$$f^{(-1)}(f(x) + f(y)) + g^{(-1)}(g(x) + g(y)) = x + y, \qquad x, y \in [0, 1], \tag{2.3}$$

gdzie f i g są generatorami odpowiednio t-normy T oraz t-konormy S. Od tej pory skupimy się na znalezieniu par funkcji (f, g) spełniających równanie (2.3).

2.2 Wprowadzenie do rozwiązania archimedesowego RF

T-normy i t-konormy ciągłe archimedesowe są generowane jednoznacznie przez addytywne generatory z dokładnością do następującej relacji.

Definicja 2.4. Niech $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ oraz $f, g\colon A \to \mathbb{R}$. Definiujemy relację $\sim \subseteq \mathbb{R}^A \times \mathbb{R}^A$ następująco:

$$f \sim g \iff \exists k > 0 \quad f = k \cdot g.$$

Uwaga 2.5 ([20])**.** Relacja $\sim$ jest relacją równoważności. Ponadto, gdy para (f, g) jest rozwiązaniem równania (2.3) oraz $f_1 \sim f$ i $g_1 \sim g$, to para (f_1, g_1) także jest rozwiązaniem równania (2.3).

Funkcje z równania (2.3) są zawsze wypukłe.

Lemat 2.6 (por. [20, Lemma 3.1])**.** *Załóżmy, że f jest generatorem t-normy T, a g generatorem t-konormy S. Wówczas, gdy para (f, g) spełnia równanie* (2.3)*, to f oraz g są funkcjami wypukłymi.*

Dowód. Z warunków (**T3**) i (**S3**) wiemy, że dla dowolnych takich $x_1, x_2, y \in [0, 1]$, że $x_1 \leq x_2$ zachodzi

$$T(x_1, y) \leq T(x_2, y),$$
$$S(x_1, y) \leq S(x_2, y).$$

Ponieważ $T(x, y) + S(x, y) = x + y$ dla dowolnych $x, y \in [0, 1]$, wstawiając $x + y - S(x, y)$ w miejsce $T(x, y)$, a $x + y - T(x, y)$ w miejsce $S(x, y)$, otrzymujemy, że funkcje T i S spełniają warunek Lipschizta ze względu na pierwszą zmienną:

$$S(x_2, y) - S(x_1, y) \leq x_2 - x_1, \qquad \text{dla takich } x_1, x_2, y \in [0, 1], \quad \text{że } x_1 \leq x_2. \tag{2.4}$$

$$T(x_2, y) - T(x_1, y) \leq x_2 - x_1, \qquad \text{dla takich } x_1, x_2, y \in [0, 1], \quad \text{że } x_1 \leq x_2,$$

Z twierdzenia 1.63 otrzymujemy, że funkcja T jest kopułą. Z twierdzenia 1.62 otrzymujemy, że generator T jest funkcją wypukłą. Niech T_1 będzie t-normą dualną do t-konormy S, czyli $T_1 = 1 - S(1-x, 1-y)$. Oczywiście t-norma T_1 jest archimedesowa, ponieważ $T_1(x,x) = 1 - S(1-x,1-x) < 1-(1-x) = x$, dla dowolnych $x \in (0,1)$. Wstawiając T_1 do (2.4) otrzymujemy

$$T_1(x_1', y) - T_1(x_2', y) \leq x_1' - x_2', \qquad \text{dla takich } x_1', x_2', y \in [0,1], \quad \text{że } x_2' \leq x_1',$$

gdzie $x_1' = 1 - x_1$ i $x_2' = 1 - x_2$. Stąd, t-norma T_1 jest kopułą i posiada generator wypukły f_1. Wtedy $g(x) = f_1(1-x)$ jest generatorem t-konormy S, ponieważ T_1 jest dualna do S. Natomiast złożenie $f_1 \circ \varphi$, gdzie $\varphi(x) = 1-x$ jest funkcją wklęsłą, a f_1 wypukłą i malejącą jest funkcją wypukłą. Stąd, funkcja g jest wypukła, co kończy dowód lematu. □

Lemat 2.7 ([34, Theorem 5.14]). *Załóżmy, że f jest generatorem t-normy T, a g generatorem t-konormy S. Jeśli para (f,g) spełnia równanie* (2.3)*, to albo $(f,g) \sim (1-x, x)$ albo $f(0) = g(1) = \infty$.*

Dowód. Załóżmy, że $f(0) < \infty$. Ponieważ generator t-normy generuje rozwiązanie z dokładnością do mnożenia przez dodatnią stałą, więc możemy założyć bez straty ogólności (patrz uwaga 2.5), że $f(0) = 1$. Niech $x_0 = f^{-1}(\frac{1}{2})$. Wtedy

$$T(x_0, y) = 0 \iff y \in [0, x_0]. \tag{2.5}$$

Wypukłość f implikuje, że $x_0 \leq \frac{1}{2}$ i $1 = 2f(x_0) \leq f\left(\frac{x_0}{2}\right) + f\left(\frac{3x_0}{2}\right)$. Stąd $T(\frac{x_0}{2}, \frac{3x_0}{2}) = 0$. Z łączności S otrzymujemy $S(S(x_0, \frac{x_0}{2}), \frac{3x_0}{2}) = S(x_0, S(\frac{x_0}{2}, \frac{3x_0}{2}))$, co w połączeniu z (RF) i równoważnością (2.5) daje

$$\begin{aligned} S\left(\frac{3x_0}{2}, \frac{3x_0}{2}\right) &= S\left(x_0 + \frac{x_0}{2} - T\left(x_0, \frac{x_0}{2}\right), \frac{3x_0}{2}\right) \\ &= S\left(x_0, \frac{x_0}{2} + \frac{3x_0}{2} - T\left(\frac{x_0}{2}, \frac{3x_0}{2}\right)\right) \\ &= S(x_0, 2x_0). \end{aligned}$$

Wykorzystując ponownie (RF) i równoważność (2.5) dostajemy

$$T\left(\frac{3x_0}{2}, \frac{3x_0}{2}\right) = T(x_0, 2x_0) > 0, \text{ czyli } 2f\left(\frac{3x_0}{2}\right) = f(x_0) + f(2x_0).$$

Korzystając z wypukłości f otrzymujemy, że funkcja $f|_{[x_0, 2x_0]}$ musi być funkcją liniową. Istotnie, przypuśćmy, że $f|_{[x_0,2x_0]}$ nie jest liniowa. Z wypukłości funkcji f istnieje takie $x = \lambda x_0 + (1-\lambda)2x_0$, że $f(x) < \lambda f(x_0) + (1-\lambda) f(2x_0)$, dla pewnego $\lambda \in (0,1) \setminus \{\frac{1}{2}\}$. Załóżmy, że $x \in (x_0, \frac{3x_0}{2})$, wtedy $\lambda > \frac{1}{2}$ i

$$f(x) < \lambda f(x_0) + (1-\lambda) f(2x_0) = \lambda\left(2f\left(\frac{3x_0}{2}\right) - f(2x_0)\right) + (1-\lambda) f(2x_0),$$

stąd $f\left(\frac{3x_0}{2}\right) > \frac{1}{2\lambda} f(x) + \frac{2\lambda - 1}{2\lambda} f(2x_0)$, ale to przeczy wypukłości f, ponieważ $\frac{3x_0}{2} = \frac{1}{2\lambda} x + \frac{2\lambda-1}{2\lambda} 2x_0$. Postępując podobnie, gdy $x \in (\frac{3x_0}{2}, 2x_0)$ otrzymujemy, że istnieje takie $k < 0$, że dla każdego $x \in [0, x_0]$, $f(x_0 + x) = f(x_0) + k \cdot x$. Niech $x \in (0, x_0)$ wtedy $T(x_0, x_0 + x) > 0$ i stosując ponownie łączność S oraz równanie (RF):

$$\begin{aligned} S(x_0 + x, x_0) &= S(x_0 + x - T(x_0, x), x_0) \\ &= S(x, x_0 + x_0 - T(x_0, x_0)) \\ &= S(x, 2x_0), \end{aligned}$$

otrzymujemy $T(2x_0, x) = T(x_0, x_0 + x) > 0$, stąd $f(2x_0) + f(x) = f(x_0) + f(x_0 + x)$, lub równoważnie $f(x) = f(x_0) + f(x_0 + x) - f(2x_0) = f(x_0) + k \cdot (x - x_0)$. Z ciągłości otrzymujemy, że $f|_{[0,2x_0]}$ jest funkcją liniową. Ponieważ $f(0) = 1$ i $f(x_0) = \frac{1}{2}$, stąd $f(2x_0) = 0$, czyli $x_0 = \frac{1}{2}$. Ostatecznie $f(x) = 1 - x$, dla każdego $x \in [0, 1]$, skąd $T = T_{\mathbf{LK}}$ i $S = S_{\mathbf{LK}}$. □

Wniosek 2.8. *Niech $T \in \mathcal{T}_A$ i $S \in \mathcal{S}_A$ oraz niech f i g są ich odpowiednimi generatorami. Wtedy para (T, S) jest archimedesowym rozwiązaniem równania* (RF) *wtedy i tylko wtedy, gdy albo $(T, S) = (T_{\boldsymbol{LK}}, S_{\boldsymbol{LK}})$ albo para funkcji (f, g) spełnia poniższe równanie funkcyjne:*

$$f^{-1}(f(x) + f(y)) + g^{-1}(g(x) + g(y)) = x + y, \qquad x, y \in [0, 1]. \tag{2.6}$$

Z powyższego wniosku wynika, że teraz wystarczy rozwiązać równanie (2.6). Aby to osiągnąć, będziemy potrzebowali kilku lematów dotyczących pary funkcji (f, g) z (2.6).

Lemat 2.9 (por. [20, Lemma 3.3])**.** *Wypukły generator t-normy oraz wypukły generator t-konormy są funkcjami różniczkowalnymi w zbiorze* $(0, 1)$*. W szczególności, jeśli para (f, g) jest rozwiązaniem równania* (2.6)*, to funkcje f oraz g są różniczkowalne w zbiorze* $(0, 1)$*.*

Dowód. Niech $x \in (0, 1)$. Ponieważ f jest funkcją wypukłą, więc istnieją granice $f'_-(x)$, $f'_+(x)$ oraz $f'_-(x) \le f'_+(x)$. By udowodnić, że f ma pochodną w punkcie x, wystarczy pokazać, że $f'_+(x) \le f'_-(x)$. W tym celu ustalmy ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ elementów ze zbioru $(x, 1)$ ściśle rosnący zbieżny do 1. Ponadto, niech ciągi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będą takie, że

$$y_n = f^{-1}(f(a_n) + f(x)), \qquad z_n = f^{-1}(f(x) - f(a_n)), \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{2.7}$$

Ponieważ funkcje f oraz f^{-1} są ściśle malejące oraz $f(1) = 0$, otrzymujemy, że $y_n < x < z_n$, dla dowolnych $\in \mathbb{N}$ oraz $\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n = x$. Ponadto $y_n < y_{n+1}$ i $z_{n+1} < z_n$. Korzystając z wypukłości funkcji f otrzymujemy dla dowolnych $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{y_n + z_n}{2}\right) &= f\left(\frac{f^{-1}(f(a_n) + f(x)) + f^{-1}(f(x) - f(a_n))}{2}\right) \\ &\le \frac{f(f^{-1}(f(a_n) + f(x))) + f(f^{-1}(f(x) - f(a_n)))}{2} \\ &= \frac{f(a_n) + f(x) + f(x) - f(a_n)}{2} = f(x). \end{aligned}$$

Stosując następnie monotoniczność funkcji f^{-1} mamy

$$x - y_n \le z_n - x, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{2.8}$$

Korzystając ze wzorów (2.7) i wypukłości funkcji f otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(a_n)}{x-y_n} = \lim_{n\to\infty} -\frac{f(x)-f(y_n)}{x-y_n} = -f'_-(x),$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(a_n)}{z_n-x} = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x)-f(z_n)}{z_n-x} = -f'_+(x) > 0.$$

Ostra nierówność wynika z lematu 1.8. Istotnie rozważmy funkcję $F\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ następującej postaci

$$F(n) = -\frac{f(z_n)-f(x)}{z_n-x}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Na mocy lematu funkcja F jest niemalejąca oraz $F(0) > 0$, czyli $\lim_{n\to\infty} F(n) > 0$. Stąd otrzymujemy nierówność

$$1 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{z_n-x}{x-y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{f(a_n)}{x-y_n}}{\frac{f(a_n)}{z_n-x}} = \frac{f'_-(x)}{f'_+(x)}.$$

Stąd $f'_+(x) \leq f'_-(x)$. By udowodnić różniczkowalność funkcji g wystarczy w roli ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wziąć ciąg ściśle malejący zbieżny do zera o elementach ze zbioru $(0, x)$ i zastosować powyższe rozumowanie. □

Zaprezentujemy teraz następujący wniosek [20, Corollary 3.3] wraz dowodem uzupełnionym przez Autora.

Wniosek 2.10. *Jeśli para* (f, g) *jest rozwiązaniem równania* (2.6)*, to*

(i) Funkcje f' *i* g' *są niemalejące w odcinku* $(0,1)$*. Ponadto funkcje* f', g' *są ciągłe w* $(0,1)$*;*

(ii) $f'(0^+) = -\infty$*,* $f'(x) < 0$*, dla* $x \in (0,1)$*,* $f'(1^-) \leq 0$*;*

(iii) $g'(0^+) \geq 0$*,* $g'(x) > 0$*, dla* $x \in (0,1)$*,* $g'(1^-) = \infty$*.*

Dowód.

(i) Z lematu 2.9 wiemy, że funkcje f i g są różniczkowalne. Skąd wykorzystując wypukłość f i g na mocy twierdzenia 1.9 otrzymujemy, że funkcje f' i g' są niemalejące. To implikuję, że funkcje f' i g' są ciągłe w $(0,1)$ (ponieważ pochodna funkcji posiada własność Darboux).

(ii) Ponieważ f jest ściśle malejąca, więc $f'(x) < 0$, dla $x \in (0,1)$, stąd też $f'(1^-) \leq 0$. Zauważmy, że

$$\forall_{M<0}\forall_{h\in(0,1)}\exists_{x\in(0,1),x+h\in(0,1)} \quad f(x+h) - f(x) \leq Mh. \tag{2.9}$$

Istotnie, dowodząc nie wprost przypuśćmy, że istnieje takie $M < 0$ i $h \in (0,1)$, że dla każdego $x \in (0,1)$

$$f(x+h) - f(x) > Mh.$$

Wtedy zmierzając z $x \to 0^+$ otrzymujemy, że $-\infty \geq Mh$, co prowadzi do sprzeczności i tym samym dowodzi (2.9). Na mocy klasycznego twierdzenia Lagrande'a i warunku (2.9) dla dowolnego $M < 0$, $h = \frac{1}{2}$ istnieje taki $x \in (0,1)$ i $x_0 \in (x, x+h)$, że

$$f'(y) \leq f'(x_0) \leq M, \qquad y \in (0, x_0),$$

ponieważ f' jest niemalejąca. Z dowolności M otrzymujemy, że $f'(0^+) = -\infty$.

(iii) Dowód przebiega analogicznie jak dowód punktu (ii) z tą różnicą, że funkcja g jest ściśle rosnąca. □

Lemat 2.11 ([20, Lemma 3.4])**.** *Jeśli para (f, g) jest rozwiązaniem równania* (2.6), *to dla wszystkich $(x, y) \in (0, 1)^2$,*

$$\frac{f'(x)}{f'(T(x,y))} + \frac{g'(x)}{g'(S(x,y))} = 1. \tag{2.10}$$

Dowód. Wystarczy zróżniczkować równanie (2.6) względem zmiennej x i zastosować wzór na pochodną funkcji odwrotnej ($(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$, gdzie $f(x) = y$). □

Lemat 2.12 ([20, Lemma 3.5])**.** *Jeśli para (f, g) jest rozwiązaniem równania* (2.6), *to funkcje f' g' są ściśle rosnące w zbiorze* $(0, 1)$.

Dowód. Z wniosku 2.10 wiemy, że funkcja f' jest niemalejąca. Przypuśćmy, że

$$f'(z) = f'(x), \text{ dla pewnych takich } x \text{ i } z, \text{ że } 0 < z < x < 1.$$

Wtedy z wniosku 2.10 $f'(z) < 0$. Niech $y = f^{-1}(f(z) - f(x))$. Wtedy $0 < y < 1$, $z = T(x, y)$ oraz z (2.10)

$$\frac{g'(x)}{g'(S(x,y))} = 1 - \frac{f'(x)}{f'(T(x,y))} = 1 - \frac{f'(x)}{f'(z)} = 0. \tag{2.11}$$

Natomiast $S(x, y) \in (0, 1)$, ponieważ S jest t-konormą ścisłą. Stąd $g'(S(x, y)) \in (0, \infty)$, wiemy z równania (2.11), że $g'(x) = 0$, co prowadzi do sprzeczności z wnioskiem 2.10. To dowodzi, że funkcja f' jest ściśle rosnąca w $(0, 1)$. Analogicznie dowodzimy, że funkcja g' jest ściśle rosnąca w $(0, 1)$. □

Lemat 2.13 ([20, Lemma 3.6])**.** *Załóżmy, że para (f, g) jest rozwiązaniem równania* (2.6).

1. *Jeśli $f'(1^-) = 0$, to funkcja $f' \cdot g$ jest stała w zbiorze* $(0, 1)$.
2. *Jeśli $g'(0^+) = 0$, to funkcja $f \cdot g'$ jest stała w zbiorze* $(0, 1)$.

Dowód. Udowodnimy tylko punkt (1), punkt (2) dowodzi się analogicznie. Zauważmy wpierw, że dla $z \in (0, 1)$,

$$-f'(z) = -\lim_{x \to 1^-} \frac{f(T(z,x)) - f(z)}{T(z,x) - z} = \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x)}{z - T(z,x)}.$$

Niech u, v będą takie, że $0 < u < v < 1$. Wtedy biorąc $1 > x > v$ i wykorzystując zależność $T(z, x) + S(z, x) = z + x$, otrzymujemy

$$\frac{f'(u)}{f'(v)} = \lim_{x \to 1^-} \frac{v - T(v,x)}{u - T(u,x)} = \lim_{x \to 1^-} \frac{S(v,x) - x}{S(u,x) - x}. \tag{2.12}$$

Stosując twierdzenie 1.9 i lemat 1.8

$$0 < g'(x) \le \frac{g(u)}{S(u,x) - x} \le \frac{g(v)}{S(v,x) - x} \le g'(S(v,x)), \tag{2.13}$$

stąd

$$\frac{g'(x)}{g'(S(v,x))} \leq \frac{\frac{g(u)}{S(u,x)-x}}{\frac{g(v)}{S(v,x)-x}} \leq 1, \qquad \text{dla każdego } 1 > x > v.$$

Załóżmy, że $f'(1^-) = 0$. Wtedy ze wzoru (2.10) otrzymujemy

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{g'(x)}{g'(S(v,x))} = 1 - \lim_{x\to 1^-} \frac{f'(x)}{f'(T(v,x))} = 1 - \frac{f'(1^-)}{f'(v)} = 1.$$

Łącząc powyższą zależność ze wzorami (2.12) i (2.13) otrzymujemy

$$\frac{f'(u)g(u)}{f'(v)g(v)} = \frac{g(u)}{g(v)} \lim_{x\to 1^-} \frac{S(v,x)-x}{S(u,x)-x} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\frac{g(u)}{S(u,x)-x}}{\frac{g(v)}{S(v,x)-x}} = 1.$$

Stąd $f'(u)g(u) = f(v)g'(v)$ co dowodzi, że funkcja $f' \cdot g$ jest stała. □

Lemat 2.14 ([20, Lemma 3.7]). *Załóżmy, że para (f,g) jest rozwiązaniem równania* (2.6). *Niech funkcje φ oraz ψ będą zdefiniowane w $(0,1)$ następująco*

$$\varphi(x) = 1 - \frac{f'(1^-)}{f'(x)},$$

$$\psi(x) = 1 - \frac{g'(0^+)}{g'(x)},$$

oraz przyjmujemy, że $\varphi(0) = \varphi(0^+)$, $\varphi(1) = \varphi(1^-)$, $\psi(0) = \psi(0^+)$, $\psi(1) = \psi(1^-)$.

1. *Jeśli $f'(1^-) \neq 0$, to φ jest ściśle malejąca i ciągła oraz $\varphi(0) = 1$ i $\varphi(1) = 0$.*

2. *Jeśli $g'(0^+) \neq 0$, to ψ jest ściśle rosnąca i ciągła oraz $\psi(0) = 0$ i $\psi(1) = 1$.*

Dowód. Wystarczy zastosować wniosek 2.10 i lemat 2.12. □

Lemat 2.15 ([20, Lemma 3.8]). *Załóżmy, że para (f,g) jest rozwiązaniem równania* (2.6). *Niech funkcje φ, ψ będą zdefiniowane tak jak w lemacie 2.14. Wtedy*

1. *jeśli $f'(1^-) \neq 0$, to $-\ln\varphi$ jest generatorem funkcji S.*

2. *jeśli $g'(0^+) \neq 0$, to $-\ln\psi$ jest generatorem funkcji T.*

Dowód. Załóżmy, że $f'(1^-) \neq 0$. Wtedy z poprzedniego lematu 2.14 funkcja $-\ln\varphi$ jest ściśle rosnąca i ciągła w odcinku $[0,1]$ i spełnia $-\ln\varphi(0) = 0$ i $-\ln\varphi(1) = \infty$. Wystarczy pokazać, że $-\ln\varphi(S(x,y)) = -\ln\varphi(x) - \ln\varphi(y)$ lub równoważnie

$$\varphi(S(x,y)) = \varphi(x)\varphi(y), \qquad x,y \in (0,1).$$

Ustalmy $x,y \in (0,1)$. Korzystając z ciągłości f', S, T oraz ze wzoru (2.10) otrzymujemy

$$\varphi(y) = 1 - \frac{f'(1^-)}{f'(y)} = 1 - \lim_{z\to 1^-} \frac{f'(z)}{f'(T(z,y))} = \lim_{z\to 1^-} \frac{g'(z)}{g'(S(z,y))}. \tag{2.14}$$

Stosując powyższy wzór, dla $x, y \in (0,1)$,

$$\varphi(x) = \lim_{S(z,y)\to 1^-} \frac{g'(S(z,y))}{g'(S(S(z,y),z))} = \lim_{z\to 1^-} \frac{g'(S(z,y))}{g'(S(S(z,y),z))} = \lim_{z\to 1^-} \frac{g'(S(z,y))}{g'(S(z,S(x,y)))}. \tag{2.15}$$

Wykorzystując wzory (2.14) i (2.15) otrzymujemy

$$\begin{aligned}\varphi(x)\varphi(y) &= \lim_{z\to 1^-} \left[\frac{g'(z)}{g'(S(z,y))} \cdot \frac{g'(S(z,y))}{g'(S(z,S(x,y)))}\right] = \lim_{z\to 1^-} \frac{g'(z)}{g'(S(z,S(x,y)))} \\ &= \varphi(S(x,y)).\end{aligned}$$

Zakładając, że $g'(0^+) \neq 0$ równanie $\psi(T(x,y)) = \psi(x)\psi(y)$ dowodzimy analogicznie wykorzystując

$$\psi(y) = \lim_{z\to 0^+} \frac{f'(z)}{f'(T(z,y))}. \tag{2.16}$$

□

Lemat 2.16 ([20, Lemma 3.9])**.** *Załóżmy, że para (f,g) jest rozwiązaniem równania* (2.6)*.*

1. *Jeśli $f'(1^-) \neq 0$, to $g_0 \sim g$, gdzie*

$$g_0(x) = -\ln\left(1 - \frac{f'(1^-)}{f'(x)}\right), \qquad x \in (0,1). \tag{2.17}$$

2. *Jeśli $g'(0^+) \neq 0$, to $f_0 \sim f$, gdzie*

$$f_0(x) = -\ln\left(1 - \frac{g'(0^+)}{g'(x)}\right), \qquad x \in (0,1). \tag{2.18}$$

Dowód. Stosujemy poprzedni lemat i uwagę 2.5. □

Lemat 2.17 ([20, Lemma 3.10])**.** *Jeśli para (f,g) jest rozwiązaniem równania* (2.6)*. Wtedy funkcje f', g' mają ciągłe pochodne w zbiorze* $(0,1)$*.*

Dowód. Na mocy lematów 2.13 i 2.16 $g(x) = -\frac{a}{f'(x)}$ lub $g(x) = -a\ln\left[1 - \frac{f'(1^-)}{f'(x)}\right]$ oraz $f(x) = -\frac{b}{g'(x)}$ lub $f(x) = -b\ln\left[1 - \frac{g'(0^+)}{g'(x)}\right]$, dla pewnych stałych $a, b > 0$. Stąd z ciągłości pochodnych f, g w $(0,1)$, otrzymujemy tezę. □

Lemat 2.18 ([20, Lemma 3.11])**.** *Załóżmy, że $f'(1^-) = g'(0^+) = 0$. Wtedy para (f,g) nie jest rozwiązaniem równania* (2.6)*.*

Dowód. Przypuśćmy, że para (f,g) jest rozwiązaniem równania (2.6). Wtedy z lematu 2.13 istnieją takie stałe $c_1 < 0$, $c_2 > 0$, że

$$f' \cdot g \equiv c_1, \qquad f \cdot g' \equiv c_2, \qquad \text{w zbiorze } (0,1). \tag{2.19}$$

Ponadto z poprzedniego lematu wiemy, że funkcja f'' jest ciągła. Wtedy różniczkując pierwsze równanie 2.19 mamy

$$f' \cdot g' + f'' \cdot g = 0.$$

Stosując wzory (2.19) mamy $\frac{c_2 f'}{f} + \frac{c_1 f''}{f'} = 0$. Po scałkowaniu dla pewnego $\alpha > 0$, otrzymujemy równanie

$$c_2 \ln f + c_1 \ln(-f') = -\ln \alpha,$$

stąd $f' = -af^k$ dla $a > 0$ i $k > 0$. Jeśli $k = 1$, to $f(x) = be^{-ax}$ gdzie $a, b > 0$. Wtedy $f(0) = b < \infty$ to jest sprzeczne z założeniem o funkcji f. Jeśli $1 \neq k$, to $f(x) = [(1-k)(c-ax)]^{\frac{1}{1-k}}$, dla a, $k > 0$, ale wtedy $f(0) < \infty$, to prowadzi do sprzeczności i zarazem kończy dowód. □

Pozostaje sprawdzić przypadek kiedy tylko jedno z wyrażeń $f'(1^-)$, $g'(0^+)$ jest równe zero. Następujące lematy dają odpowiedź na to pytanie.

Lemat 2.19 ([20, Lemma 3.12]). *Załóżmy, że $f'(1^-) = 0$ i $g'(0^+) \neq 0$. Wtedy para (f, g) nie jest rozwiązaniem równania* (2.6)*. Ponadto, taka sama tezę otrzymujemy w przypadku, gdy $f'(1^-) \neq 0$ i $g'(0^+) = 0$.*

Dowód. Przypuśćmy, że para (f_0, g_0) jest rozwiązaniem równania (2.6) oraz $f_0'(1^-) = 0$ i $g_0'(0^+) \neq 0$. Niech $g(x) = \frac{g_0(x)}{g_0'(0^+)}$, na mocy uwagi 2.5 para (f_0, g) spełnia równanie (2.6). Z lematu 2.16 wiemy, że gdy $f(x) = -\ln\left(1 - \frac{1}{g'(x)}\right)$, to $f_0 \sim f$. Stąd na mocy uwagi 2.5 para (f, g) spełnia równanie (2.6). Z lematu 2.13 istnieje takie $c > 0$, że $f'(x) = -\frac{c}{g(x)}$, dla każdego $x \in (0, 1)$. Stąd

$$\frac{-g''}{g'(g'-1)} = \left(-\ln\left(1 - \frac{1}{g'(x)}\right)\right)' = -\frac{c}{g(x)},$$
$$c\frac{g'}{g} = \frac{g''}{g'-1}.$$

Ponieważ g jest ściśle rosnąca oraz $g'(0^+) = 1$, to po scałkowaniu mamy

$$c \ln g + \ln a = \ln(g' - 1), \qquad a > 0,$$

gdzie

$$g' = 1 + ag^c, \qquad a > 0, \qquad c > 0. \tag{2.20}$$

Pokażemy, że $c = 1$. Zauważmy, że dla dowolnego $y \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \frac{g(T(x,y))}{g(x)} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{f'(x)}{f'(T(x,y))} \qquad \text{ponieważ } f'(x) = \frac{c}{g(x)} \\
&= \psi(y) = 1 - \frac{1}{g'(y)} \qquad \text{z (2.16)} \\
&= 1 - \frac{1}{1 + ag^c(y)} \qquad \text{z (2.20)} \\
&= \frac{ag^c(y)}{1 + ag^c(y)}.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Korzystając ze wzoru (2.20) otrzymujemy, że dla dowolnego $x \in [0, 1]$

$$f(x) = -\ln\left[1 - \frac{1}{g'(x)}\right] = \ln\left[1 + \frac{1}{ag^c(x)}\right],$$

stąd otrzymujemy, że $g(x) = [a(e^{f(x)} - 1)]^{-\frac{1}{c}}$. Stąd

$$g(T(x,y)) = g(f^{-1}(f(x) + f(y))) = [a(e^{f(x)+f(y)} - 1)]^{-\frac{1}{c}} = \left[\frac{ag^c(x)g^c(y)}{1 + ag^c(x) + ag^c(y)}\right]^{\frac{1}{c}}.$$

Dzieląc przez $g(x)$ i przechodząc z $x \to 0^+$ dostajemy

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{g(T(x,y))}{g(x)} = \left[\frac{ag^c(y)}{1 + ag^c(y)}\right]^{\frac{1}{c}}. \tag{2.22}$$

Porównując wzory (2.21), (2.22) dostajemy, że $c = 1$, ponieważ $\frac{ag^c(y)}{1+ag^c(y)}$ nie może być równe 0 bądź 1.
Co implikuję, że g spełnia równanie $g' = 1 + ag$, dla $a > 0$. Co po scałkowaniu daje rozwiązanie postaci $g(x) = Ae^{ax} - \frac{1}{a}$, dla $A > 0$. To prowadzi do sprzeczności ponieważ $g(1) = \infty$. Dowód w przypadku $f'(1^-) \neq 0$, $g'(0^+) = 0$ jest identyczny, wystarczy zamienić f z g. □

Z powyższych lematów wynika, że jeżeli para funkcji (f, g) spełnia (2.6), to

$$f'(1^-) \neq 0 \neq g'(0^+).$$

Poniższy lemat pokazuje jaki to ma wpływ na funkcje φ i ψ z lematu 2.14.

Lemat 2.20 ([20, Lemma 3.13])**.** *Załóżmy, że $f'(1^-) \neq 0 \neq g'(0^+)$ i para (f, g) jest rozwiązaniem równania (2.6). Niech φ, ψ będą funkcjami zdefiniowanymi tak samo jak w lemacie 2.14. Wtedy $-\varphi'(0^+) = \psi'(1^-)$.*

Dowód. Z lematu 2.17, funkcje φ, ψ są różniczkowalne. Stąd dla każdego $x \in (0, 1)$

$$\varphi'(x) = \frac{f'(1^-)f''(x)}{[f'(x)]^2},$$

$$\psi'(x) = \frac{g'(0^+)g''(x)}{[g'(x)]^2},$$

Natomiast, z faktu iż funkcje f', g' są różniczkowalne, różniczkując równanie (2.10) względem y dostajemy następujące równanie

$$\begin{aligned} \frac{-f'(x)f'(y)f''(T(x,y))}{[f'(T(x,y))]^3} &= \frac{g'(x)g'(y)g''(S(x,y))}{[g'(S(x,y))]^3} \\ &= \frac{g'(x)g'(y)}{g'(S(x,y))} \cdot \frac{\psi'(S(x,y))}{g'(0^+)} \text{ zamiana } S(x,y) \text{ za } x \text{ w } \psi'(x) \\ &= \psi'(S(x,y)) \cdot \frac{1}{1-\psi(x)} \cdot \frac{g'(y)}{g'(S(x,y))} \text{ z definicji } \psi \\ &= \psi'(S(x,y)) \cdot \frac{1}{1-\psi(x)} \cdot \left(1 - \frac{f'(y)}{f'(T(x,y))}\right). \text{ z (2.10)} \end{aligned} \tag{2.23}$$

Wstawiając do wzoru na φ' otrzymujemy

$$\begin{aligned}
-\varphi'(x) &= \frac{-f'(x)f'(1^-)f''(x)}{[f'(x)]^3} \\
&= \lim_{y\to 1^-} \frac{-f'(x)f'(y)f''(T(x,y))}{[f'(T(x,y))]^3} \qquad \text{z ciągłości} f', f'', T \\
&= \lim_{y\to 1-} \psi'(S(x,y)) \cdot \frac{1}{1-\psi(x)} \cdot \left(1 - \frac{f'(y)}{f'(T(x,y))}\right) \qquad \text{z (2.23)} \\
&= \psi'(1^-) \cdot \frac{1}{1-\psi(x)} \cdot \left(1 - \frac{f'(1^-)}{f'(x)}\right) \qquad \text{z ciągłości } f',\ S,\ \psi'.
\end{aligned}$$

Przechodząc do granicy $x \to 0^+$ otrzymujemy

$$-\varphi'(0^+) = \psi'(1^-) \cdot \frac{1}{1-\psi(0)} \cdot \varphi(0) = \psi'(1^-).$$

□

2.3 Rozwiązanie ogólne RF

Kluczową role w rozwiązaniu (RF) spełniają tak zwane t-normy i t-konormy Franka zdefiniowane następująco.

Definicja 2.21. Rodzinę t-norm Franka $T^{\mathbf{F}}_\lambda$, dla $\lambda \in [0,\infty]$ definiujemy następująco:

$$T^{\mathbf{F}}_\lambda(x,y) = \begin{cases} T_{\mathbf{M}}(x,y), & \lambda = 0, \\ T_{\mathbf{P}}(x,y), & \lambda = 1, \\ T_{\mathbf{LK}}(x,y), & \lambda = \infty, \\ \log_\lambda \left[1 + \frac{(\lambda^x-1)(\lambda^y-1)}{\lambda-1}\right], & \lambda \in (0,\infty) \setminus \{1\}. \end{cases}$$

Korzystając z twierdzenia 1.35, każda funkcja dualna do t-normy jest t-konormą. Definiujemy Rodzinę t-konorm Franka $S^{\mathbf{F}}_\lambda$ dla $\lambda \in [0,\infty]$ jako funkcje dualne do t-norm Franka:

$$S^{\mathbf{F}}_\lambda(x,y) = \begin{cases} S_{\mathbf{M}}(x,y), & \lambda = 0, \\ S_{\mathbf{P}}(x,y), & \lambda = 1, \\ S_{\mathbf{LK}}(x,y), & \lambda = \infty, \\ 1 - \log_\lambda \left[1 + \frac{(\lambda^{1-x}-1)(\lambda^{1-y}-1)}{\lambda-1}\right], & \lambda \in (0,\infty) \setminus \{1\}. \end{cases}$$

Warto zauważyć, że para funkcji $(T^{\mathbf{F}}_\lambda, S^{\mathbf{F}}_\lambda)$, dla $\lambda \in (0,\infty]$ ma następującą postać addytywnych generatorów:

$$f_1(x) = -\ln x, \qquad g_1(x) = -\ln(1-x);$$

$$f_\infty(x) = 1-x, \qquad g_\infty(x) = x;$$

$$f_\lambda(x) = -\ln\left(\frac{\lambda^x - 1}{\lambda - 1}\right), \qquad g_\lambda(x) = -\ln\left(\frac{\lambda^{1-x}-1}{\lambda-1}\right);$$

$$\forall_{\lambda\in(0,\infty]} \quad g_\lambda(x) = f_\lambda(1-x).$$

Ponadto funkcje $(T^{\mathbf{F}}_\lambda, S^{\mathbf{F}}_\lambda)$ są ścisłe z wyjątkiem $\lambda \in \{0,\infty\}$.

Mamy już wszystkie narzędzia być podać rozwiązanie (RF) w przypadku archimedesowym.

Twierdzenie 2.22 ([20, Lemma 3.14]). *Niech $f'(1^-) \neq 0 \neq g'(0^+)$ i niech para (f, g) jest rozwiązaniem równania (2.6). Wtedy istnieje takie $0 < \lambda < \infty$, że $(f, g) \sim (f_\lambda, g_\lambda)$, gdzie f_λ jest generatorem t-normy Franka $T_\lambda^{\boldsymbol{F}}$, a g_λ generatorem t-konormy Franka $S_\lambda^{\boldsymbol{F}}$.*

Dowód. Niech funkcje f_0, g_0 będą zdefiniowane tak jak w lemacie 2.16. Ponadto z tego samego lematu wiemy, że $f_0 \sim f$ i $g_0 \sim g$. Stąd funkcje f_0, g_0 spełniają poniższe równania

$$g_0(x) = -\ln\left(1 - \frac{f_0'(1^-)}{f_0'(x)}\right), \qquad x \in (0,1) \tag{2.24}$$

$$f_0(x) = -\ln\left(1 - \frac{g_0'(0^+)}{g_0'(x)}\right), \qquad x \in (0,1) \tag{2.25}$$

Uwaga 2.5 implikuje, że para (f_0, g_0) spełnia równanie (2.6). Wtedy $f_0 = -\ln\psi$ i $g_0 = -\ln\varphi$ (z lematu 2.14). Skąd

$$g_0'(0^+) = -\frac{\varphi'(0^+)}{\varphi(0)} = -\varphi'(0^+) = \psi'(1^-) = \frac{\psi'(1^-)}{\psi(1)} = -f_0'(1^-).$$

Bez straty ogólności będziemy od tej pory zamiast funkcji f_0 pisać f oraz zamiast funkcji g_0 pisać g. Ponadto, niech $a = -f'(1^-)$. Różniczkując wzór (2.24) otrzymujemy

$$g' = \frac{\frac{af''}{(f')^2}}{1 + \frac{a}{f'}} = \frac{af''}{f'(f'+a)}.$$

Następnie wstawiając powyższe rozwiązanie do (2.25) mamy

$$e^{-f} = 1 - \frac{a}{\frac{af''}{f'(f'+a)}} = \frac{f'' - f'(f'+a)}{f''}.$$

Po przekształceniu powyższej równości dostajemy

$$f'' = e^f f'' - e^f f'(f'+a), \text{ co daje } \qquad \frac{e^f f'}{e^f - 1} = \frac{f''}{f'+a}.$$

Po scałkowaniu, dla pewnego $b > 0$ dostajemy

$$\ln|e^f - 1| = \int \frac{e^f f'}{e^f - 1} dx = \int \frac{f''}{f'+a} dx = \ln|f'+a| - \ln b = \ln\frac{-f'-a}{b}.$$

Skąd $f' = -(a + b(e^f - 1))$. Stosując wzór na pochodną funkcji odwrotnej mamy

$$x = (f^{-1})(y) = -\int \frac{dy}{a + b(e^y - 1)}. \tag{2.26}$$

Rozważymy dwa przypadki ($a = b$ i $a \neq b$). Jeśli $a = b$, to

$$x = f^{-1}(y) = -\int \frac{dy}{ae^y} = \frac{1}{a}e^{-y} + k,$$

ponieważ $f^{-1}(\infty) = 0$, stąd $k = 0$, a $f^{-1}(0) = 1$, stąd $a = 1$. Wtedy $f^{-1}(y) = e^{-y}$, czyli $f = f_1$. Jeśli $a \neq b$, to stosujemy w całce (2.26) podstawienie $u = b(e^y - 1)$ rozbijając całkę na ułamki proste otrzymujemy

$$x = (f^{-1})(y) = \frac{-1}{a-b}\ln\left[\frac{be^y}{a - b + be^y}\right] + k.$$

Ponieważ $f^{-1}(0) = 1$, stąd $k = 1 - \frac{1}{a-b} \ln \frac{a}{b}$, więc

$$x = (f^{-1})(y) = 1 - \frac{1}{a-b} \ln \left[\frac{ae^y}{a-b+be^y} \right].$$

Wyliczając y otrzymujemy

$$f(x) = \ln \left[\frac{e^{(1-x)(a-b)}(a-b)}{a-be^{(1-x)(a-b)}} \right] = -\ln \left[\frac{ae^{(1-x)(b-a)}-b}{a-b} \right].$$

Ponieważ $f(0) = \infty$, stąd $ae^{b-a} - b = 0$. Niech $\lambda = \frac{a}{b} = e^{a-b}$. Stąd

$$f(x) = -\ln \left[\frac{a(\frac{b}{a})^{(1-x)} - b}{a-b} \right] = -\ln \left[\frac{(\frac{a}{b})^x - 1}{\frac{a}{b} - 1} \right] = -\ln \left[\frac{\lambda^x - 1}{\lambda - 1} \right].$$

Stąd, $f = f_\lambda$, dla $\lambda \neq 1$ dodatniego. □

Łącząc twierdzenia 2.3, 2.22 otrzymujemy następujące rozwiązanie równania Franka.

Twierdzenie 2.23 ([20, Theorem 1.1]). *Para (T, S) jest rozwiązaniem równania* (RF) *wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie $\lambda \in [0, \infty]$, że $(T, S) = (T^{\boldsymbol{F}}_\lambda, S^{\boldsymbol{F}}_\lambda)$, lub gdy istnieje taki zbiór przeliczalny K, że*

$$T = (\langle a_k, b_k, T^{\boldsymbol{F}}_{\lambda_k} \rangle)_{k \in A} \text{ i } S = (\langle a_k, b_k, S^{\boldsymbol{F}}_{\lambda_k} \rangle)_{k \in A}.$$

Dowód. Z twierdzenia 2.22 wiemy, że jedynymi ścisłymi rozwiązaniami (RF) są rozwiązania postaci $(T^{\mathbf{F}}_\lambda, S^{\mathbf{F}}_\lambda)$, dla $\lambda \in (0, \infty)$. Z wniosku 2.8 rozwiązanie postaci $(T_{\mathbf{LK}}, S_{\mathbf{LK}})$ jest jedynym rozwiązaniem archimedesowym nie ścisłym. Z twierdzenia pozostałymi rozwiązaniami są rozwiązania postaci takiej, że (T, S) są sumami prostymi o członach które są postaci $(T^{\mathbf{F}}_\lambda, S^{\mathbf{F}}_\lambda)$ dla pewnego $\lambda \in (0, \infty]$ (para $(T_{\mathbf{M}}, S_{\mathbf{M}})$ jest oczywiście sumą prostą). □

2.4 Rozwiązanie RF w wersji dla kopuł

Obecny rozdział zaczęliśmy od podania równania (2.1) dla kopuł. Teraz posiadamy już wszystkie narzędzia do rozwiązania tego równania. Zauważmy wpierw, że równanie (2.1) można zapisać w postaci

$$C^* = C,$$

gdzie funkcja C^* jest określona wzorem z definicji 1.64. Zaprezentujemy teraz następujące twierdzenie [35, Proposition 4.2] wraz dowodem uzupełnionym przez Autora.

Twierdzenie 2.24. *Łączna kopuła C jest rozwiązaniem równania* (2.1) *wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie $\lambda \in [0, \infty]$, że $C = T^{\boldsymbol{F}}_\lambda$ lub gdy C jest sumą prostą t-norm Franka, czyli*

$$C = (\langle a_k, b_k, T^{\boldsymbol{F}}_{\lambda_k} \rangle)_{k \in K},$$

gdzie dla każdego $k \in K$ istnieje takie $k' \in K$, że $\lambda_k = \lambda_{k'}$ oraz $a_k + b_{k'} = a_{k'} + b_k = 1$.

Dowód. Z twierdzenia 1.61 wiemy, że każda kopuła łączna jest t-normą ciągłą, czyli na mocy twierdzenia 1.27 jest kopułą archimedesową lub jest sumą prostą kopuł archimedesowych. Dowód przeprowadzimy w dwóch etapach. W pierwszym, gdy kopuła C jest kopułą archimedesowa, w drugim, gdy jest sumą porządkową kopuł archimedesowych.

1. Załóżmy, że C jest kopułą archimedesową.

   $\Rightarrow$ Niech C spełnia równanie (2.1). Załóżmy ponadto, że $T = C$ oraz $S = \overline{C}$. Wtedy funkcja T jest t-normą ponieważ kopuły łączne są t-normami oraz funkcja S jest t-konormą jako funkcja dualna do t-normy. Stąd wynika, że para (T, S) musi spełniać równanie (RF). Wtedy z twierdzenia 2.23 wiemy, że istnieje takie $\lambda \in (0, \infty]$ (gdy $\lambda = 0$, to $(T^{\mathbf{F}}_{\lambda}, S^{\mathbf{F}}_{\lambda}) = (\min, \max)$), że $(T, S) = (T^{\mathbf{F}}_{\lambda}, S^{\mathbf{F}}_{\lambda})$. Stąd otrzymujemy, że C jest równe $T^{\mathbf{F}}_{\lambda}$.

   $\Leftarrow$ Jeśli $C = T^{\mathbf{F}}_{\lambda}$, dla pewnego $\lambda \in (0, \infty]$. Wtedy wiemy, że para $(T^{\mathbf{F}}_{\lambda}, S^{\mathbf{F}}_{\lambda})$ spełnia (RF), dla każdego $\lambda \in (0, \infty]$, oraz $\overline{T^{\mathbf{F}}_{\lambda}} = S^{\mathbf{F}}_{\lambda}$. Skąd wynika, że C spełnia równanie (2.1).

2. Załóżmy, że C jest sumą porządkowa kopuł archimedesowych.

   $\Leftarrow$ Niech C będzie taką sumą porządkową jak w tezie twierdzenia. Na mocy twierdzenia 1.60 taka suma porządkowa jest kopułą. Zauważmy, że dla dowolnych $x, y \in [0, 1]$ zachodzi równoważność

$$(x, y) \in [a_k, b_k]^2 \Longleftrightarrow (1 - x, 1 - y) \in [1 - b_k, 1 - a_k]^2. \tag{2.27}$$

   Ustalmy $(x, y) \in [0, 1]^2$. Zauważmy, że gdy nie istnieje takie $k \in K$, że $(x, y) \notin [a_k, b_k]^2$, to $C(x, y) = \min(x, y)$ i wtedy $C^*(x, y) = C(x, y)$. Załóżmy, że $(x, y) \in [a_k, b_k]^2$, dla pewnego $k \in K$. Wtedy

$$C(x, y) = a_k + (b_k - a_k) T^{\mathbf{F}}_{\lambda_k} \left(\frac{x - a_k}{b_k - a_k}, \frac{y - a_k}{b_k - a_k} \right). \tag{2.28}$$

   Niech $\alpha = \frac{x-a_k}{b_k-a_k}, \beta = \frac{y-a_k}{b_k-a_k}$. Z pierwszej części dowodu wiemy, że

$$T^{\mathbf{F}}_{\lambda_k}(\alpha, \beta) = \alpha + \beta - 1 + T^{\mathbf{F}}_{\lambda_k}(1 - \alpha, 1 - \beta).$$

   Na mocy założenia istnieje takie $k' \in K$, że $a_{k'} = 1 - b_k$, $b_{k'} = 1 - a_k$ oraz $\lambda_{k'} = \lambda_k$. Wstawiając powyższą zależność do wzoru (2.28) i wykorzystując (2.27) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
C(x, y) &= a_k + (b_k - a_k) \left(\alpha + \beta - 1 + T^{\mathbf{F}}_{\lambda_k}(1 - \alpha, 1 - \beta)\right) \\
&= a_k + (b_k - a_k) \left(\frac{x - a_k}{b_k - a_k} + \frac{y - a_k}{b_k - a_k} - 1 \right) \\
&\quad + (b_k - a_k) T^{\mathbf{F}}_{\lambda_k} \left(1 - \frac{x - a_k}{b_k - a_k}, 1 - \frac{y - a_k}{b_k - a_k} \right) \\
&= x + y - 1 + 1 - b_k \\
&\quad + (b_k - a_k) T^{\mathbf{F}}_{\lambda_k} \left(\frac{1 - x - (1 - b_k)}{b_k - a_k}, \frac{1 - y - (1 - b_k)}{b_k - a_k} \right) \\
&= x + y - 1 + a_{k'} + (b_{k'} - a_{k'}) T^{\mathbf{F}}_{\lambda_{k'}} \left(\frac{1 - x - a_{k'}}{b_{k'} - a_{k'}}, \frac{1 - x - a_{k'}}{b_{k'} - a_{k'}} \right) \\
&= x + y - 1 + C(1 - x, 1 - y).
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Załóżmy, że $C = (\langle a_k, b_k, T_k\rangle)_{k\in K}$ dla pewnego przeliczalnego zbioru K oraz C spełnia równanie (2.1). Niech $T = C$ oraz $S = \overline{C}$. Wtedy z twierdzenia 2.23 wiemy, że para (T, S) spełnia równanie (RF). Z twierdzenia 2.3 wynika, że para (T_k, S_k) spełnia równanie (RF), dla dowolnego $k \in K$, czyli T_k spełnia (2.1), dla wszystkich $k \in K$. Skąd na mocy dowodu pierwszej części twierdzenia otrzymujemy, że $T_k = T^{\mathbf{F}}_{\lambda_k}$, dla każdego $k \in K$. Niech $x, y \in [a_k, b_k]$ wtedy na mocy (2.27) $1 - x, 1 - y \in [1 - b_k, 1 - a_k]$, rozumując analogicznie jak w dowodzie $\Leftarrow$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}
C(1-x, 1-y) &= -x - y + 1 + C(x, y)\\
&= -x - y + 1 + a_k + (b_k - a_k) T^{\mathbf{F}}_{\lambda_k}\left(\frac{x-a_k}{b_k-a_k}, \frac{y-a_k}{b_k-a_k}\right)\\
&= -x - y + 1 + a_k + (b_k - a_k)\left(\frac{x-a_k}{b_k-a_k} + \frac{y-a_k}{b_k-a_k} - 1\right)\\
&\quad + (b_k - a_k) T^{\mathbf{F}}_{\lambda_k}\left(1 - \frac{x-a_k}{b_k-a_k}, 1 - \frac{y-a_k}{b_k-a_k}\right)\\
&= 1 - b_k + (b_k - a_k) T^{\mathbf{F}}_{\lambda_k}\left(\frac{b_k-x}{b_k-a_k}, \frac{b_k-y}{b_k-a_k}\right).
\end{aligned}$$

Stosując podstawienia $\mu = 1 - x, \nu = 1 - y$, $a_{k'} = 1 - b_k, b_{k'} = 1 - a_k$ oraz $\lambda_{k'} = \lambda_k$ otrzymujemy, że dla dowolnych $\mu, \nu \in [a_{k'}, b_{k'}]$

$$C(\mu, \nu) = a_{k'} + (b_{k'} - a_{k'}) T^{\mathbf{F}}_{\lambda_{k'}}\left(\frac{\mu - a_{k'}}{b_{k'} - a_{k'}}, \frac{\nu - a_{k'}}{b_{k'} - a_{k'}}\right),$$

co kończy dowód twierdzenia.

□

Wniosek 2.25 ([35])**.** *Kombinacja wypukła rozwiązań równania* (2.1) *jest także rozwiązaniem tego równania.*

Dowód. Wystarczy zastosować lemat 1.67. □

Należy podkreślić, że istnieją niełączne rozwiązania równania (2.1), co ilustruje poniższy przykład.

Przykład 2.26. Niech $C = \frac{T_{\mathbf{M}} + T_{\mathbf{LK}}}{2}$. Wtedy funkcja C jest kopułą przemienną spełniającą równanie (2.1) na mocy poprzedniego wniosku. Ponadto łatwo sprawdzić, że kopuła C nie jest funkcją łączną, w szczególności nie jest t-normą.

Wszystkie rozwiązania równania (2.1) w klasie kopuł można uogólnić w następujący sposób.

Twierdzenie 2.27 (por. [35, Theorem 3.3])**.** *Kopuła D jest rozwiązaniem równania* (2.1) *wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka kopuła C, że kopułę D można zapisać w następującej postaci:*

$$D = \frac{C + C^*}{2}. \tag{2.29}$$

Dowód.

$\Rightarrow$ Jeśli kopuła D jest rozwiązaniem równania (2.1), to spełnia równanie $D = D^*$. By otrzymać tezę wystarczy wziąć $C = D$.

$\Leftarrow$ Niech C będzie kopułą. Załóżmy, że funkcja D jest takiej postaci jak we wzorze (2.29). Funkcja D jest kopuła jako kombinacja wypukła kopuł. Korzystając z lematów 1.65, 1.67 otrzymujemy

$$D^* = \left(\frac{C + C^*}{2}\right)^* = \frac{C^* + (C^*)^*}{2} = \frac{C^* + C}{2} = \frac{C + C^*}{2} = D.$$

□

Oczywiści kombinacja wypukła kopuł przemiennych jest kopułą przemienną. Ale nie tylko kopuły przemienne spełniają równanie (2.1).

Przykład 2.28 ([35, Example 3.5])**.** Niech $C_{np,2}(x, y) = xy + x^2y(1-x)(1-y)$, dla $x, y \in [0, 1]$ (patrz przykład 1.53). Rozważmy funkcję $D = (\langle 0, \frac{1}{2}, C_{np,2}\rangle)$, czyli

$$D(x, y) = \begin{cases} 2xy + 4x^2y(1 - 2x)(1 - 2y) & x, y \in [0, \frac{1}{2}]^2, \\ \min(x, y) & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Wówczas kopuła $D_1 = \frac{D+D^*}{2}$ jest rozwiązaniem nieprzemiennym równania (2.1). Istotnie, z poprzedniego twierdzenia kopuła D_1 jest rozwiązaniem równania (2.1). Ponadto $D_1(\frac{2}{10}, \frac{4}{10}) = \frac{1149}{6250} \neq \frac{1173}{6250} = D_1(\frac{4}{10}, \frac{2}{10})$.

Przyjrzymy się teraz pewnej modyfikacji równania (2.1), mianowicie

$$C = \tilde{C},$$

gdzie funkcja $\tilde{C}$ jest określona wzorem z definicji 1.64, czyli

$$C(x, y) = x + y - 1 + C(1 - y, 1 - x), \qquad x, y \in [0, 1]. \tag{CCP}$$

Otrzymujmy natychmiastowy wniosek.

Wniosek 2.29. *Niech C będzie kopułą. Rozwiązania równania* (CCP) *pokrywają się z rozwiązaniami równania* (2.1) *($C^* = C = \tilde{C}$) wtedy i tylko wtedy, gdy C jest przemienna. W szczególności, gdy kopuła C jest łączna, to rozwiązania równania* (CCP) *są identyczne jak rozwiązania równania* (2.1) *(patrz twierdzenie 2.24). Ponadto kombinacja wypukła rozwiązań równania* (CCP) *jest także rozwiązaniem tego równania.*

Dowód. Załóżmy, że $C^* = C = \tilde{C}$, dla pewnej kopuły C. Stąd,

$$x + y - 1 + C(1 - x, 1 - y) = x + y - 1 + C(1 - y, 1 - x), \quad x, y \in [0, 1],$$

czyli $C(1-x, 1-y) = C(1-y, 1-x)$, dla dowolnych $x, y \in [0, 1]$. Skąd otrzymujemy przemienność C. Korzystając z lematu 1.67 otrzymujemy, że kombinacja wypukła rozwiązań równania (CCP) jest także rozwiązaniem tego równania. □

Dla równania (CCP) otrzymujmy analogiczne twierdzenie do twierdzenia 2.27.

Twierdzenie 2.30. *Kopuła D jest rozwiązaniem równania* (2.1) *wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka kopuła C, że kopułę D można zapisać w następującej postaci:*

$$D = \frac{C + \tilde{C}}{2}. \tag{2.30}$$

Dowód.

$\Rightarrow$ Jeśli kopuła D jest rozwiązaniem równania (CCP), to spełnia równanie $D = \tilde{D}$. By otrzymać tezę wystarczy wziąć $C = D$.

$\Leftarrow$ Niech C będzie kopułą. Załóżmy, że funkcja D jest takiej postaci jak we wzorze (2.30). Funkcja D jest kopułą jako kombinacja wypukła kopuł. Korzystając z lematów 1.65, 1.67 otrzymujemy

$$\tilde{D} = \frac{\tilde{C} + \tilde{\tilde{C}}}{2} = \frac{\tilde{C} + C}{2} = \frac{C + \tilde{C}}{2} = D.$$

$\square$

Podobnie jak w przypadku równania (2.1) także istnieją nieprzemienne rozwiązania równania (CCP).

Przykład 2.31. Niech $D = (\langle 0, \frac{1}{2}, C_{np,2} \rangle)$. Wtedy kopuła $D_2 = \frac{D+\tilde{D}}{2}$ jest rozwiązaniem nieprzemiennym równania (CCP). Istotnie, $D_2(\frac{2}{10}, \frac{4}{10}) = \frac{1149}{6250} \neq \frac{1173}{6250} = D_2(\frac{4}{10}, \frac{2}{10})$.

Rozdział 3

Wybrane klasy implikacji generowanych z semikopuł

W następującym rozdziale omówimy dwie klasy implikacji generowanych z semikopuł. Pierwszą to implikacje indukowane z semikopuł. Pierwsze dwa podrozdziały dotyczą tych implikacji i bazują głównie na pracach [16], [36] i książce [6], wraz z uzupełniem dowodów przez Autora. Następne trzy podrozdziały bazują na pracach [4], [5], gdzie w pracy [5] jednym z współautorów jest Autor obecnej dysertacji. Dotyczą one funkcji postaci $J_{I,B}(x,y) = I(x, B(x,y))$, gdzie I jest implikacją rozmytą, a B semikopułą.

3.1 Implikacje indukowane

Definicja 3.1 ([11, Definition 3.1])**.** Funkcję $R\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ nazywamy **implikacją indukowaną**, jeśli istnieje taka semikopuła B, że

$$R(x,y) = \sup\{t \in [0,1] \mid B(x,t) \le y\}, \qquad x, y \in [0,1].$$

Implikację indukowaną generowaną z semikopuły B oznaczamy przez R_B.

Warto zaznaczyć, że warunek (**C1**) semikopuły gwarantuje, że w powyższej definicji nie występuje supremum po zbiorze pustym. W literaturze jedną z ważniejszych własności, która może łączyć parę (B, R_B) jest zasada indukcji (związek Galoisa [22]).

Definicja 3.2 (por. [24, str 92])**.** Powiemy, że funkcje B i R_B spełniają **zasadę indukcji** (ang. ***residual principle***), gdy

$$B(x,z) \le y \Leftrightarrow R_B(x,y) \ge z, \qquad x, y, z \in [0,1]. \tag{RP}$$

Przykładem semikopuły nie spełniającej (RP) ze swoją implikacją indukowaną jest t-norma drastyczna $T_{\mathbf{D}}$, która nie spełnia (RP) z implikacją Webera $I_{\mathbf{WB}}$ ($R_{T_{\mathbf{D}}} = I_{\mathbf{WB}}$). Istotnie, niech $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{3}$, $z = 1$, wówczas

$$\frac{1}{2} = T_{\mathbf{D}}\left(\frac{1}{2}, 1\right) > \frac{1}{3} \quad \text{oraz} \quad 1 = I_{\mathbf{WB}}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) \ge 1,$$

co przeczy warunkowi (RP). Następujące twierdzenie pokazuje, dla jakich semikopuł B zachodzi (RP) z implikacją indukowaną R_B.

Twierdzenie 3.3 (por. [36, Theorem 2]). *Niech B będzie semikopułą, wtedy następujące warunki są równoważne:*

(i) B jest ciągła lewostronnie ze względu na drugą zmienną;

(ii) B i R_B spełniają warunek (RP)*;*

(iii)
$$R_B(x,y) = \max\{t \in [0,1] \mid B(x,t) \le y\}, \qquad x,y \in [0,1].$$

Dowód.

(i)$\Longrightarrow$(ii) Załóżmy, że B jest ciągła lewostronnie ze względu na drugą zmienną. Zauważmy, że jeśli dla pewnych $x,y,z \in [0,1]$ nierówność $B(x,z) \le y$ zachodzi, to z definicji implikacji indukowanej $z \le R_B(x,y)$. Z drugiej strony załóżmy, że dla pewnych $x,y,z \in [0,1]$ zachodzi nierówność $z \le R_B(x,y)$. Jeśli $z < R_B(x,y)$, to istnieje takie $t_0 > z$, że $B(x,t_0) \le y$. Z monotoniczności B otrzymujemy, że $B(x,z) \le y$. Jeśli $z = R_B(x,y)$, to gdy $z = 0$, to $0 = B(x,0) \le y$. Jeśli $z > 0$, to z własności supremum istnieje taki ciąg $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$, że $t_n < z$ i $B(x,t_n) \le y$, dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ i $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = z$. Z ciągłości lewostronnej B ze względu na drugą zmienną otrzymujemy
$$B(x,z) = B(x, \lim_{n\to\infty} t_n) = \lim_{n\to\infty} B(x,t_n) \le y.$$

(ii)$\Longrightarrow$(iii) Załóżmy, że B i R_B spełniają warunek (RP). Z oczywistej nierówności $R_B(x,y) \ge R_B(x,y)$ dostajemy, że $B(x, R_B(x,y)) \le y$, stąd
$$R_B(x,y) = \max\{t \in [0,1] \mid B(x,t) \le y\}.$$

(iii)$\Longrightarrow$(i) Najpierw pokażemy, że B jest prawo sup-dystrybutywna, czyli dla dowolnego niepustego zbioru S zachodzi
$$B(x, \sup_{s\in S} y_s) = \sup_{s\in S} B(x,y_s), \qquad x, y_s \in [0,1], s \in S.$$

Ustalmy zbiór niepusty S oraz elementy $x, y_s \in [0,1]$, gdzie $s \in S$. Wówczas $B(x, \sup\limits_{s\in S} y_s) \ge \sup\limits_{s\in S} B(x,y_s)$, z monotoniczności B. Niech $y = \sup\limits_{s\in S} B(x,y_s)$. Ponieważ dla dowolnego $s \in S$ mamy $B(x,y_s) \le y$, więc $y_s \le R_B(x,y)$. Stąd $\sup\limits_{s\in S} y_s \le R_B(x,y)$. Ponownie z monotoniczności B i z (iii) otrzymujemy
$$B(x, \sup_{s\in S} y_s) \le B(x, R_B(x,y)) \le y = \sup_{s\in S} B(x,y_s).$$

To dowodzi, że B jest prawo sup-dystrybutywna. Załóżmy teraz, że $x_n, y_n \in [0,1]$ i $y_n \le y_{n+1}$, dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Wówczas
$$B(x, \lim_{n\to\infty} y_n) = B(x, \sup_{n\in\mathbb{N}} y_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} B(x,y_n) = \lim_{n\to\infty} B(x,y_n).$$

□

Korzystając z dowodu twierdzenia [6, Theorem 2.5.7] otrzymujemy.

Twierdzenie 3.4. *Niech B będzie semikopułą ciągłą lewostronnie. Wtedy funkcja R_B spełnia następujące warunki:*

$(R1)$ $\forall_{x,y\in[0,1]}(R_B(x,y)=1 \iff x\le y)$;

$(R2)$ $\forall_{y\in[0,1]}(R_B(1,y)=y)$;

$(R3)$ $\forall_{x_1,x_2,y\in[0,1]}(x_1\le x_2 \Rightarrow R_B(x_1,y)\ge R_B(x_2,y))$;

$(R4)$ $\forall_{y_1,y_2,x\in[0,1]}(y_1\le y_2 \Rightarrow R_B(x,y_1)\le R_B(x,y_2))$;

$(R5)$ *R_B jest ciągła lewostronnie ze względu na pierwszą zmienną;*

$(R6)$ *R_B jest ciągła prawostronnie ze względu na drugą zmienną.*

Dowód.

$(R1)$ Jeśli $x\le y$, to $R_B(x,y)=1$ z definicji. By pokazać $(R1)$, przypuśćmy, że dla pewnych $x>y$ z przedziału zachodzi $[0,1]$ $R_B(x,y)=1$. Stąd istnieje taki rosnący ciąg $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zbieżny do 1, że $B(x,t_n)\le y$. Z ciągłości lewostronnej B otrzymujemy, że $x=B(x,1)\le y$, ale to jest sprzeczne z założeniem, że $x>y$, czyli R_B spełnia $(R1)$.

$(R2)$ Jeśli $y\in[0,1]$, to

$$R_B(1,y)=\sup\{t\in[0,1]\mid B(1,t)\le y\}=\sup\{t\in[0,1]\mid t\le y\}=y,$$

co dowodzi $(R2)$.

$(R3)$ Załóżmy, że $y,x_1,x_2\in[0,1]$ są takie, że $x_1\le x_2$. Z monotoniczności B otrzymujemy

$$\{t\in[0,1]\mid B(x_2,t)\le y\}\subseteq\{t\in[0,1]\mid B(x_1,t)\le y\},$$

przechodząc do supremum, otrzymujemy, że $R_B(x_2,y)\le R_B(x_1,y)$, co dowodzi $(R3)$.

$(R4)$ Analogicznie jak w $(R3)$ dowodzimy warunku $(R4)$.

$(R5)$ Dla dowodu $(R5)$ przypuśćmy, że R_B nie jest ciągła lewostronnie ze względu na pierwszą zmienną w punkcie $(x_0,y_0)\in(0,1]\times[0,1]$. Ponieważ R_B spełnia (**I1**), stąd istnieją takie $a,b\in[0,1]$, że $a>b$ i

$$\begin{aligned} &R_B(x,y_0)\ge a, && \text{dla wszystkich } x<x_0,\\ &R_B(x_0,y_0)=b. \end{aligned}$$

Natomiast z ciągłości lewostronnej B, na mocy twierdzenia 3.3, para (B,R_B) spełnia (RP). Stąd

$$B(x,a)\le y_0, \qquad \text{dla wszystkich } x<x_0.$$

Przechodząc do granicy $x\to x_0^-$, $B(x_0,a)\le y_0$. Stosując ponownie (RP)

$$b=R_B(x_0,y_0)\ge a,$$

co jest sprzeczne z założeniem, że $a>b$, i dowodzi warunku $(R5)$.

$(R6)$ Przypuśćmy, że R_B nie jest ciągła prawostronnie ze względu na drugą zmienną w punkcie $(x_0,y_0)\in[0,1]\times[0,1)$. Ponieważ R_B spełnia (**I2**), stąd istnieją takie $a,b\in[0,1]$, że $a>b$ oraz

$$\begin{aligned} &R_B(x_0,y)\ge a, && \text{dla wszystkich } y>y_0,\\ &R_B(x_0,y_0)=b. \end{aligned}$$

Zatem z definicji implikacji indukowanej

$$B(x_0, d) \leq y, \qquad \text{dla wszystkich } y > y_0,$$

dla $d = \frac{a+b}{2}$. Przechodząc do granicy $y \to y_0^+$, $B(x_0, d) \leq y_0$. Stąd $R_B(x_0, y_0) \geq d > b$, a to jest sprzeczne z założeniem, że $R_B(x_0, y_0) = b$ i dowodzi warunku $(R6)$. □

Warto zauważyć, że w odróżnieniu od dowodu twierdzenia [6, Theorem 2.5.7] w powyższym dowodzie warunku $(R6)$ nie wykorzystujemy ciągłości lewostronnej semikopuły. Klasę funkcji $R\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ spełniających warunki $(R1) - (R6)$ będziemy oznaczać przez $\mathcal{R}$.

Uwaga 3.5. Zauważmy, że w poprzednim twierdzeniu $(R1)$ to (OP), $(R2)$ to (NP), $(R3)$ to (**I1**) a $(R4)$ to (**I2**). Ważne jest, że warunek ciągłości lewostronnej semikopuły B wykorzystujemy tylko w punkcie $(R5)$ oraz w implikacji $\Rightarrow$ w $(R1)$. Stąd funkcja R_B jest implikacją rozmytą dla każdej semikopuły oraz spełnia warunek (NP) i $(R6)$. Niech $T_{\mathbf{B}}$ będzie t-normą określoną następującym wzorem

$$T_{\mathbf{B}}(x,y) = \begin{cases} 0, & (x,y) \in (0,1)^2 \setminus [\frac{1}{2}, 1)^2, \\ \min(x,y), & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases}$$

a $I_{T_{\mathbf{B}}}$ jej implikacją indukowaną

$$I_{T_{\mathbf{B}}}(x,y) = \begin{cases} 1, & x \leq y \text{ lub } x, y \in [0, \frac{1}{2}), \\ \frac{1}{2}, & x \in [\frac{1}{2}, 1) \text{ i } y \in [0, \frac{1}{2}) \\ y, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Wówczas $I_{T_{\mathbf{B}}}$ nie spełnia warunków $(R1)$, $(R5)$ [33, Example 1.6 (iii)].

Twierdzenie 3.6 (por. [16, Theorem 3.5])**.** *Niech B będzie semikopułą przemienną, ciągłą lewostronnie. Wtedy implikacja $R_B \in \mathcal{R}$ i spełnia warunek*

$$\forall x, y, z \in [0,1] \quad R_B(x,z) \geq y \Longleftrightarrow R_B(y,z) \geq x. \tag{R7}$$

Dowód. Na mocy twierdzenia 3.4 $R_B \in \mathcal{R}$. Korzystając z twierdzenia 3.3 implikacji (i)$\Rightarrow$(ii) i przemienności B dostajemy

$$R_B(x,z) \geq y \Longleftrightarrow B(x,y) \leq z \Longleftrightarrow B(y,x) \leq z \Longleftrightarrow R_B(y,z) \geq x,$$

dla dowolnych $x, y, z \in [0,1]$. □

Twierdzenie 3.7 (por. [16, Theorem 3.6])**.** *Niech B będzie semikopułą ciągłą lewostronnie i łączną. Wtedy implikacja indukowana $R_B \in \mathcal{R}$ i spełnia warunek*

$$\forall_{x,y,z,u \in [0,1]} \quad \big(R_B(y, R_B(x,z)) \geq u \Leftrightarrow \exists_{v \in [0,1]} \quad R_B(x,v) \geq y \wedge R_B(v,z) \geq u\big). \tag{R8}$$

Dowód. Na mocy twierdzenia 3.4 $R_B \in \mathcal{R}$. Niech $x, y, z, u \in [0,1]$. Wtedy

$$\begin{aligned} R_B(y, R_B(x,z)) \geq u &\Leftrightarrow B(y,u) \leq R_B(x,z) \Leftrightarrow B(x, B(y,u)) \leq z \\ &\Leftrightarrow B(B(x,y),u) \leq z \Leftrightarrow u \leq R_B(B(x,y),z). \end{aligned}$$

Nierówność $u \leq R_B(B(x,y),z)$ jest równoważna z tym, że $B(x,y) \leq v$ i $R_B(v,z) \geq u$, dla pewnego $v \in [0,1]$ (dla implikacji $\Rightarrow$ wystarczy wziąć $v = B(x,y)$). To jest równoważne z $R_B(x,v) \geq y$ i $R_B(v,z) \geq u$, na mocy warunku (RP). □

Wniosek 3.8 (por. [16, Theorem 3.7]). *Niech T będzie t-normą ciągłą lewostronnie. Wtedy R_T spełnia warunki* $(R1) - (R8)$.

Wniosek 3.9 (por. [16, Corollary 3.8]). *Niech T będzie t-normą ciągłą lewostronnie. Wtedy R_T spełnia* (EP).

Dowód. Na mocy poprzedniego wniosku funkcja R_T spełnia $(R1) - (R8)$. W szczególności z (R8), dla każdych $x, y, z, u \in [0, 1]$ $R_T(y, R_T(x, z)) \geq u$ wtedy i tylko wtedy, gdy $R_T(x, v) \geq y$ i $R_T(v, z) \geq u$, dla pewnego $v \in [0, 1]$. Z warunku (R7) wynika, że $R_T(x, v) \geq y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $R_T(y, v) \geq x$. Korzystając ponownie z (R8) dostajemy, że $R_T(x, R_T(y, z)) \geq u$, co na mocy dowolności u dowodzi (EP), dla R_T. □

Inny dowód powyższego wniosku można znaleźć w [6].

Twierdzenie 3.10 (por. [16, Theorem 3.9]). *Niech Q będzie quasikopułą. Wtedy implikacja $R_Q \in \mathcal{R}$ oraz spełnia dwa następujące warunki:*

$$\forall_{\varepsilon>0}\forall_{x,y\in[0,1]}(x + \varepsilon \in [0, 1] \wedge y - \varepsilon \in [0, 1] \Rightarrow R_Q(x + \varepsilon, y) \geq R_Q(x, y - \varepsilon)); \quad \text{(R9)}$$

$$\forall_{\varepsilon>0}\forall_{x,y\in[0,1]}(y - \varepsilon \in [0, 1] \Rightarrow R_Q(x, y) \geq R_Q(x, y - \varepsilon) + \varepsilon). \quad \text{(R10)}$$

Dowód. Na mocy twierdzenia 3.4 $R_Q \in \mathcal{R}$. Ponadto dla każdych takich $\varepsilon > 0$, $x, y, z \in [0, 1]$, że $x + \varepsilon, y - \varepsilon \in [0, 1]$ mamy $Q(x + \varepsilon, z) - Q(x, z) \leq \varepsilon$, stąd

$$\{z \in [0, 1] \mid Q(x + \varepsilon, z) \leq y\} \supseteq \{z \in [0, 1] \mid Q(x, z) + \varepsilon \leq y\},$$

co implikuje

$$\sup\{z \in [0, 1] \mid Q(x + \varepsilon, z) \leq y\} \geq \sup\{z \in [0, 1] \mid Q(x, z) \leq y - \varepsilon\}.$$

Skąd wynika, że $R_Q(x + \varepsilon, y) \geq R_Q(x, y - \varepsilon)$, co dowodzi (R9). Analogicznie dla każdych takich $\varepsilon > 0$, $x, y, z \in [0, 1]$, że $y - \varepsilon \in [0, 1]$ mamy $Q(x, z) - Q(x, z - \varepsilon) \leq \varepsilon$, stąd

$$\{z \in [0, 1] \mid Q(x, z) \leq y\} \supseteq \{z \in [0, 1] \mid Q(x, z - \varepsilon) \leq y - \varepsilon\},$$

co implikuje

$$\sup\{z \in [0, 1] \mid Q(x, z) \leq y\} \geq \sup\{z \in [0, 1] \mid Q(x, z - \varepsilon) \leq y - \varepsilon\}.$$

Stąd $R_Q(x, y) \geq R_Q(x, y - \varepsilon) + \varepsilon$, co dowodzi (R10). □

Wniosek 3.11 (por. [16, Theorem 3.10]). *Jeśli C jest kopułą łączną, to funkcja R_C spełnia warunki* $(R1) - (R10)$.

Kombinacja wypukła implikacji indukowanych z lewostronnie ciągłych semikopuł należy do zbioru $\mathcal{R}$.

Twierdzenie 3.12 ([16, Proposition 5.2]). *Niech $R_1, R_2 \in \mathcal{R}$. Wtedy dla każdego $\lambda \in [0, 1]$, funkcja $R = \lambda R_1 + (1 - \lambda)R_2$ także należy do $\mathcal{R}$. Ponadto jeśli R_1 i R_2 spełniają* (R9)−(R10), *to R także spełnia* (R9)−(R10).

Dowód. Jest to konsekwencją faktu, że warunki $\mathcal{R}$ oraz warunki (R9)−(R10) zachowują się względem kombinacji wypukłych. □

Z powyższego twierdzenia wynika, że jeśli $Q_1, Q_2 \in \mathcal{Q}$ i funkcje R_{Q_1}, R_{Q_2} są ich implikacjami indukowanymi, to dla każdego $\lambda \in [0,1]$, funkcja $R = \lambda R_{Q_1} + (1-\lambda) R_{Q_2}$ także należy do $\mathcal{R}$ i spełnia warunki (R9)−(R10).

Przykład 3.13 (por. [16, Example 4.9])**.** Rozważmy t-normy $T_{\mathbf{P}}$ i $T_{\mathbf{M}}$ oraz odpowiednio ich implikacje indukowane $R_{T_{\mathbf{P}}} = I_{\mathbf{GG}}$ i $R_{T_{\mathbf{M}}} = I_{\mathbf{GD}}$. Dla każdego $\lambda \in [0,1]$ niech R_λ będzie implikacją rozmytą określoną wzorem $R_\lambda = \lambda I_{\mathbf{GG}} + (1-\lambda) I_{\mathbf{GD}}$ i niech $B_\lambda = \lambda T_{\mathbf{P}} + (1-\lambda) T_{\mathbf{M}}$. Wtedy dla każdego $\lambda \in (0,1)$ funkcja

$$R_{B_\lambda}(x,y) = \begin{cases} 1, & x \le y \\ \frac{y}{\lambda x + (1-\lambda)}, & y \le \lambda x^2 + (1-\lambda)x \\ \frac{y-(1-\lambda)x}{\lambda x}, & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases}$$

jest różna od R_λ.

Następujące twierdzenie pokazuje jakiej postaci jest implikacja indukowana z semikopuły będącej sumą porządkową semikopuł.

Twierdzenie 3.14 ([45, Theorem 5])**.** *Niech A będzie przeliczalnym zbiorem, niech $\{(\alpha_k, \beta_k) \mid k \in A\}$ będzie rodziną parami rozłącznych otwartych podprzedziałów przedziału $[0,1]$ i niech $(B_k)_{k \in A}$ będzie rodziną semikopuł ciągłych lewostronnie. Niech $B = (\langle \alpha_k, \beta_k, B_k \rangle)_{k \in A}$. Wtedy implikacja indukowana R_B jest określona wzorem*

$$R_B(x,y) = \begin{cases} \alpha_k + (\beta_k - \alpha_k) R_{B_k}\left(\frac{x-\alpha_k}{\beta_k-\alpha_k}, \frac{y-\alpha_k}{\beta_k-\alpha_k}\right), & \alpha_k \le y < x \le \beta_k, \\ I_{\mathbf{GD}}(x,y), & \textit{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Ponadto, funkcja $R_B \in \mathcal{R}$.

Dowód. Ustalmy $x, y \in [0,1]$. Oczywiście, gdy $x \le y$, to $R_B(x,y) = 1 = I_{\mathbf{GD}}(x,y)$. Dlatego załóżmy, że $x > y$ i rozważmy kilka przypadków.

- Jeśli $\alpha_k \le y < x \le \beta_k$, dla pewnego $k \in A$ wtedy, z postaci B dla $t \in [0,1]$ mamy następujące podprzypadki:

  1. Jeśli $t > \beta_k$, to $B(x,t) = \min(x,t) = x > y$.
  2. Jeśli $t < \alpha_k$, to $B(x,t) = \min(x,t) = t < \alpha_k \le y$, stąd
  $$\sup\{t \in [0,\alpha_k) \mid B(x,t) \le y\} = \sup\{t \in [0,\alpha_k) \mid t \le y\} = \alpha_k.$$
  3. Jeśli $\alpha_k \le t \le \beta_k$, to
  $$\begin{aligned} &\sup\{t \in [\alpha_k, \beta_k] \mid B(x,t) \le y\} \\ &\quad = \sup\{t \in [\alpha_k,\beta_k] \mid \alpha_k + (\beta_k-\alpha_k) B_k\left(\frac{x-\alpha_k}{\beta_k-\alpha_k}, \frac{t-\alpha_k}{\beta_k-\alpha_k}\right) \le y\} \\ &\quad = \sup\{t \in [\alpha_k,\beta_k] \mid B_k\left(\frac{x-\alpha_k}{\beta_k-\alpha_k}, \frac{t-\alpha_k}{\beta_k-\alpha_k}\right) \le \frac{y-\alpha_k}{\beta_k-\alpha_k}\} \\ &\quad = \alpha_k + (\beta_k-\alpha_k) R_{B_k}\left(\frac{x-\alpha_k}{\beta_k-\alpha_k}, \frac{y-\alpha_k}{\beta_k-\alpha_k}\right) \ge \alpha_k. \end{aligned}$$

Stąd

$$R_B(x,y) = \alpha_k + (\beta_k - \alpha_k) R_{B_k}\left(\frac{x-\alpha_k}{\beta_k-\alpha_k}, \frac{y-\alpha_k}{\beta_k-\alpha_k}\right).$$

- Jeśli $\alpha_k \le x \le \beta_k$, dla pewnego $k \in A$ i $y < \alpha_k$, to z postaci B dla $t \in [0,1]$ mamy następujące podprzypadki:

  1. Jeśli $t > \beta_k$, to $B(x,t) = \min(x,t) = x > y$.
  2. Jeśli $t < \alpha_k$, to $B(x,t) = \min(x,t) = t$, stąd

  $$\sup\{t \in [0,\alpha_k) \mid B(x,t) \le y\} = \sup\{t \in [0,\alpha_k) \mid t \le y\} = y.$$

  3. Jeśli $\alpha_k \le t \le \beta_k$, to

  $$B(x,y) = \alpha_k + (\beta_k - \alpha_k) B_k\left(\frac{x-\alpha_k}{\beta_k-\alpha_k}, \frac{y-\alpha_k}{\beta_k-\alpha_k}\right) \ge \alpha_k > y,$$

  a zatem w tym przypadku nie istnieje takie t, że $B(x,t) \le y$.

  Z powyższych rozważań otrzymujemy, że $R_B(x,y) = y = I_{\mathbf{GD}}(x,y)$ w tym przypadku.

- Jeśli nie istnieje takie $k \in A$, że $x \in [\alpha_k, \beta_k]$, to $B(x,t) = \min(x,t)$, dla $t \in [0,1]$. Stąd

  $$R_B(x,y) = \sup\{t \in [0,1] \mid B(x,t) \le y\} = y = I_{\mathbf{GD}}(x,y).$$

Ponieważ suma porządkowa semikopuł lewostronnie ciągłych jest funkcją lewostronnie ciągłą, więc z twierdzenie 3.4 dostajemy dalszą cześć tezy. □

3.2 Kopuły indukowane

Okazuje się, że w analogiczny sposób jak w poprzednim podrozdziale można otrzymać semikopuły przy pomocy implikacji rozmytych.

Definicja 3.15 ([16])**.** Niech R będzie implikacją rozmytą. Wtedy funkcję $B\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ określoną następująco:

$$B(x,y) = \inf\{z \in [0,1] \mid R(x,z) \ge y\}, \qquad x,y \in [0,1], \tag{3.1}$$

nazywamy **semikopułą indukowaną** z R i oznaczamy przez B_R.

Podobnie jak w przypadku implikacji indukowanych generowanych z semikopuł spotkaliśmy się z pojęciem zasady indukcji. Tak samo dla implikacji i indukowanych semikopuł mamy pojęcie zasady indukcji drugiego typu.

Definicja 3.16 ([24, str 92])**.** Powiemy, że funkcje I i B_I spełniają **zasadę indukcji drugiego typu**, gdy

$$B_I(x,z) \le y \Leftrightarrow I(x,y) \ge z, \qquad x,y,z \in [0,1]. \tag{RP*}$$

Analogicznie do twierdzenia 3.3 prawdziwe jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.17 (por. [36, Theorem 10]). *Niech I będzie implikacją rozmytą, wtedy następujące warunki są równoważne:*

(i) I jest ciągła prawostronnie ze względu na drugą zmienną;

(ii) B_I i I spełniają warunek (RP*)*;*

(iii) $B_I(x,y) = \min\{t \in [0,1] \mid I(x,t) \geq y\}, \qquad x,y \in [0,1].$

Dowód.

(i)$\Longrightarrow$(ii) Załóżmy, że I jest ciągła prawostronnie ze względu na drugą zmienną. Zauważmy, że jeśli dla pewnych $x,y \in [0,1]$, to zachodzi nierówność $I(x,z) \geq y$, gdy $z \geq B_I(x,y)$. Z drugiej strony załóżmy, że $z \geq B_I(x,y)$, dla pewnych $x,y \in [0,1]$. Jeśli $z > B_I(x,y)$, to istnieje takie $t_0 < z$, że $I(x,t_0) \geq y$. Z monotoniczności I otrzymujemy, że $I(x,z) \geq y$. Jeśli $z = B_I(x,y)$, to gdy $z = 1$, to $1 = I(x,1) \geq y$. Jeśli $z < 1$, to z własności infimum istnieje taki ciąg $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$, że $t_n > z$ i $I(x,t_n) \geq y$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ i $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = z$. Z prawostronnej ciągłości I ze względu na drugą zmienną otrzymujemy

$$I(x,z) = I(x, \lim_{n\to\infty} t_n) = \lim_{n\to\infty} I(x,t_n) \geq y.$$

(ii)$\Longrightarrow$(iii) Załóżmy, że I i B_I spełniają warunek (RP*). Z oczywistej nierówności $B_I(x,y) \geq B_I(x,y)$ dostajemy, że $I(x, B_I(x,y)) \geq y$, to oznacza

$$B_I(x,y) = \min\{t \in [0,1] \mid I(x,t) \geq y\}.$$

(iii)$\Longrightarrow$(i) Wpierw pokażemy, że I jest prawo inf-dystrybutywna, czyli dla dowolnego niepustego zbioru S

$$I(x, \inf_{s\in S} y_s) = \inf_{s\in S} I(x,y_s), \qquad x, y_s \in [0,1], s \in S.$$

Ustalmy zbiór niepusty S oraz elementy $x, y_s \in [0,1]$, gdzie $s \in S$. Wtedy

$$I(x, \inf_{s\in S} y_s) \leq \inf_{s\in S} I(x,y_s),$$

z monotoniczności I. Niech $y = \inf\limits_{s\in S} I(x,y_s)$. Wtedy dla ustalonego $s \in S$, mamy $I(x,y_s) \geq y$ więc $\inf\limits_{s\in S} y_s \geq B_I(x,y)$. Ponownie z monotoniczności I i z (iii) otrzymujemy

$$I(x, \inf_{s\in S} y_s) \geq I(x, B_I(x,y)) \geq y = \inf_{s\in S} I(x,y_s).$$

To dowodzi, że I jest prawo inf-dystrybutywna. Załóżmy teraz, że $x, y_n \in [0,1]$ i $y_n \geq y_{n+1}$, dla $n \in \mathbb{N}$. Wtedy

$$I(x, \lim_{n\to\infty} y_n) = I(x, \inf_{n\in\mathbb{N}} y_n) = \inf_{n\in\mathbb{N}} I(x,y_n) = \lim_{n\to\infty} I(x,y_n).$$

$\square$

Korzystając z dowodu twierdzenia [6, Theorem 2.5.14] otrzymujemy.

Lemat 3.18. *Jeśli $R \in \mathcal{R}$, to semikopuła indukowana B_R jest semikopułą ciągłą lewostronnie.*

Dowód. Pokażemy, że funkcja B_R spełnia (**C2**), (**C3**), (ND) oraz jest ciągła lewostronnie.

(**C2**) Ustalmy $y \in [0,1]$. Z warunku ($R2$) dostajemy

$$B_R(1,y) = \inf\{z \in [0,1] \mid R(1,z) \geq y\} = y.$$

(**C3**) Ustalmy $x \in [0,1]$. Z warunku ($R1$) dostajemy

$$B_R(x,1) = \inf\{z \in [0,1] \mid R(x,z) \geq 1\} = x.$$

(ND) Załóżmy, że $x, y, x_1, x_2, y_1, y_2 \in [0,1]$ i $x_1 \leq x_2$, $y_1 \leq y_2$. Wówczas z ($R3$) i ($R4$) mamy

$$\{z \in [0,1] \mid R(x_2,z) \geq y\} \subseteq \{z \in [0,1] \mid R(x_1,z) \geq y\},$$
$$\{z \in [0,1] \mid R(x,z) \geq y_2\} \subseteq \{z \in [0,1] \mid R(x,z) \geq y_1\},$$

i przechodząc do infimum otrzymujemy, że $B_R(x_1,y) \leq B_R(x_2,y)$ i $B_R(x,y_1) \leq B_R(x,y_2)$.

(ciągłość lewostronna) Przypuśćmy, że B_R nie jest ciągła lewostronnie ze względu na pierwszą zmienną w punkcie $(x_0,y_0) \in (0,1] \times [0,1]$. Ponieważ B_R spełnia (ND), stąd istnieją takie $a, b \in [0,1]$, że $a < b$ oraz

$$\begin{aligned} &B_R(x,y_0) \leq a, \qquad \text{dla wszystkich } x < x_0, \\ &B_R(x_0,y_0) = b. \end{aligned}$$

Zatem na mocy twierdzenia 3.17, para (R, B_R) spełnia (RP*). Stąd

$$R(x,a) \geq y_0, \qquad \text{dla wszystkich } x < x_0.$$

Przechodząc do granicy $x \to x_0^-$, $R(x_0,a) \geq y_0$. Stosując ponownie (RP*)

$$b = B_R(x_0,y_0) \leq a,$$

otrzymujemy co jest sprzeczne z założeniem, że $a < b$. Przypuśćmy teraz, że B_R nie jest ciągła lewostronnie ze względu na drugą zmienną w punkcie $(x_0,y_0) \in [0,1] \times (0,1]$. Ponieważ B_R spełnia (ND), stąd istnieją takie $a, b \in [0,1]$, że $a < b$ i

$$\begin{aligned} &B_R(x_0,y) \leq a, \qquad \text{dla wszystkich } y < y_0, \\ &B_R(x_0,y_0) = b. \end{aligned}$$

Zatem z definicji semikopuły indukowanej

$$R(x_0,d) \geq y, \qquad \text{dla wszystkich } y < y_0,$$

dla $d = \frac{a+b}{2}$. Przechodząc do granicy $y \to y_0^-$, $R(x_0,d) \geq y_0$. Stąd $B_R(x_0,y_0) \leq d < b$, co jest sprzeczne z założeniem, że $B_R(x_0,y_0) = b$. □

Warto zauważyć, że w odróżnieniu od dowodu twierdzenia [6, Theorem 2.5.14] w powyższym dowodzie ciągłości lewostronnej ze względu na drugą zmienną nie wykorzystujemy ciągłości prawostronnej implikacji rozmytej.

Twierdzenie 3.19 (por. [6, Lemma 2.5.15]). *Jeśli B jest semikopułą ciągłą lewostronnie, to $B = B_{R_B}$.*

Dowód. Pokażemy, że

$$B_{R_B}(x,y) = B(x,y), \qquad x,y \in [0,1].$$

Ustalmy $x,y \in [0,1]$. Ponieważ B jest ciągła lewostronnie, to z twierdzenia 3.3 para (B, R_B) spełnia (RP). Wtedy z oczywistej nierówności $B(x,y) \le B(x,y)$ otrzymujemy

$$R_B(x, B(x,y)) = \max\{t \in [0,1] \mid B(x,t) \le B(x,y)\} \ge y,$$

ale ponieważ $B(x,y) \in \{t \in [0,1] \mid R_B(x,t) \ge y\}$, stąd

$$B(x,y) \ge B_{R_B}(x,y).$$

Z drugiej strony, z twierdzenia 3.4 funkcja R_B jest implikacją rozmytą ciągłą prawostronnie ze względu na drugą zmienną, skąd na mocy twierdzenia 3.17 para (R_B, B_{R_B}) spełnia (RP*). Wtedy z oczywistej nierówności $B_{R_B}(x,y) \le B_{R_B}(x,y)$, otrzymujemy

$$R_B(x, B_{R_B}(x,y)) \ge y.$$

Ta nierówność wraz z warunkiem (RP) daje

$$B(x,y) \le B_{R_B}(x,y),$$

co kończy dowód. □

Założenie ciągłości lewostronnej semikopuły w poprzednim lemacie jest istotne.

Uwaga 3.20 ([33])**.** Rozważmy t-normę (w szczególności semikopułę) T_{nM^*}, określoną następująco:

$$T_{nM^*}(x,y) = \begin{cases} 0, & x+y<1, \\ \min(x,y), & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Wtedy $R_{T_{nM^*}} = R_{T_{nM}}$, ale $B_{R_{T_{nM^*}}} = T_{nM} \neq T_{nM^*}$.

Wniosek 3.21. *Przyporządkowanie semikopule ciągłej lewostronnie implikacji indukowanej R_B zachodzi w sposób jednoznaczny.*

Dowód. Załóżmy, że funkcje B_1, B_2 są różnymi ($B_1 \neq B_2$) semikopułami ciągłymi lewostronnie. Przypuśćmy, że $R_{B_1} = R_{B_2}$. Wtedy z twierdzenia 3.19

$$B_1 = B_{R_{B_1}} = B_{R_{B_2}} = B_2,$$

co prowadzi do sprzeczności. □

Następujące twierdzenie pokazuje, kiedy semikopuła indukowana jest funkcją przemienną.

Twierdzenie 3.22 (por. [16, Theorem 3.5])**.** *Jeśli $R \in \mathcal{R}$ oraz spełnia warunek (R7), to semikopuła indukowana B_R jest semikopułą ciągłą lewostronnie i przemienną.*

Dowód. Z lematu 3.18 otrzymujemy, że B_R jest semikopułą ciągłą lewostronnie. Z warunku (R7) dla dowolnych $x,y,u \in [0,1]$ otrzymujemy

$$\{z \in [0,1] \mid R(x,z) \ge y\} = \{z \in [0,1] \mid R(y,z) \ge x\}.$$

Przechodząc do infimum, dostajemy, że $B_R(x,y) = B_R(y,x)$, co kończy dowód. □

Następujące twierdzenie pokazuje, kiedy semikopuła indukowana jest funkcją łączną.

Twierdzenie 3.23 (por. [16, Theorem 3.6]). *Jeśli $R \in \mathcal{R}$ oraz spełnia warunek* (R8)*, to semikopuła indukowana B_R jest semikopułą ciągłą lewostronnie i łączną.*

Dowód. Z lematu 3.18 otrzymujemy, że B_R jest semikopułą ciągłą lewostronnie. Pozostaje wykazać łączność semikopuły B_R. Na mocy twierdzenia 3.17 otrzymujemy dla dowolnych $x, y, z, u \in [0,1]$

$$R(y, R(x,z)) \geq u \Leftrightarrow B_R(y,u) \leq R(x,z) \Leftrightarrow B_R(x, B_R(y,u)) \leq z.$$

Z (R8) wynika, że to jest równoważne z istnieniem takiego $v \in [0,1]$, że $R(x,v) \geq y$ i $R(v,z) \geq u$. Stąd wynika, że $B_R(x,y) \leq v$ i $R(v,z) \geq u$. Co jest równoważne z

$$u \leq R(B_R(x,y), z) \Leftrightarrow B_R(B_R(x,y), u) \leq z.$$

W końcu dostajemy równoważność

$$B_R(x, B_R(y,u)) \leq z \Leftrightarrow B_R(B_R(x,y), u) \leq z,$$

która z dowolności $z \in [0,1]$ prowadzi do łączności B_R. □

Twierdzenie 3.24 (por. [16, Theorem 3.9]). *Jeśli $R \in \mathcal{R}$ i spełnia warunki* (R9), (R10)*, to semikopuła indukowana B_R jest quasikopułą.*

Dowód. Z lematu 3.18 otrzymujemy, że B_R jest semikopułą ciągłą lewostronnie. Stąd pozostaje wykazać, że B_R spełnia warunek 1-Lipschitza. Korzystając z warunku (R9), dla każdych takich $x, y, z, \varepsilon \in [0,1]$, że $x + \varepsilon \in [0,1]$ i $z - \varepsilon \in [0,1]$, mamy

$$\{z \in [0,1] \mid R(x+\varepsilon, z) \geq y\} \supseteq \{z \in [0,1] \mid R(x, z-\varepsilon) \geq y\},$$

i wtedy

$$\inf\{z \in [0,1] \mid R(x+\varepsilon, z) \geq y\} \leq \inf\{z \in [0,1] \mid R(x, z-\varepsilon) \geq y\},$$

co implikuje, że $B_R(x+\varepsilon, y) \leq \varepsilon + B_R(x,y)$. Analogicznie korzystając z (R10) dla każdych takich $x, y, z, \eta \in [0,1]$, że $z - \eta \in [0,1]$, mamy

$$\{z \in [0,1] \mid R(x,z) - \eta \geq y\} \supseteq \{z \in [0,1] \mid R(x, z-\eta) \geq y\},$$

co implikuje

$$\inf\{z \in [0,1] \mid R(x,z) - \eta \geq y\} \leq \inf\{z \in [0,1] \mid R(x, z-\eta) \geq y\}.$$

Stąd $B_R(x, y+\eta) \leq \eta + B_R(x,y)$, co dowodzi tezy twierdzenia. □

Łącząc lemat 3.18, uwagę 1.58 i twierdzenia 3.22, 3.23, 3.24, otrzymujemy następujący wynik.

Twierdzenie 3.25 (por. [16, Theorem 3.10]). *Niech $R \colon [0,1]^2 \to [0,1]$ będzie funkcją spełniającą warunki $(R1) - (R10)$. Wówczas semikopuła indukowana C_R jest kopułą łączną.*

Przykład 3.26 (por. [16, Example 4.9]). Rozważmy t-normy $T_{\mathbf{LK}}$ i $T_{\mathbf{M}}$ oraz odpowiednio ich implikacje indukowane $R_{T_{\mathbf{LK}}} = I_{\mathbf{LK}}$ i $R_{T_{\mathbf{M}}} = I_{\mathbf{GD}}$. Dla każdego $\lambda \in [0,1]$ niech R_λ będzie implikacją indukowaną określoną wzorem $R_\lambda = \lambda I_{\mathbf{LK}} + (1-\lambda) I_{\mathbf{GD}}$. Wtedy semikopuła indukowana B_{R_λ} jest określona wzorem

$$B_{R_\lambda}(x,y) = \begin{cases} 0, & y \leq -\lambda x + \lambda, \\ x, & y \geq (1-\lambda)x + \lambda, \\ y - \alpha(1-x), & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases}$$

i jest różna od kombinacji wypukłej t-norm $T_{\mathbf{LK}}$, $T_{\mathbf{M}}$.

3.3 Funkcje postaci $I(x, B(x,y))$

Definicja 3.27 ([4]). Załóżmy, że I jest implikacją rozmytą oraz B jest semikopułą. Rozważmy funkcję $J_{I,B} \colon [0,1]^2 \to [0,1]$ określoną następująco:

$$J_{I,B}(x,y) = I(x, B(x,y)), \qquad x, y \in [0,1]. \tag{3.2}$$

Wprost z powyższej definicji otrzymujemy następujący lemat.

Lemat 3.28 ([5, Proposition 4.1]). *Dla implikacji rozmytej I i semikopuły B funkcja $J_{I,B} \colon [0,1]^2 \to [0,1]$ zdefiniowana według wzoru* (3.2) *spełnia następujące warunki:*

(i) $\forall y_1, y_2, x \in [0,1] \quad y_1 \leq y_2 \Rightarrow J_{I,B}(x,y_1) \leq J_{I,B}(x,y_2)$;

(ii) $\forall y \in [0,1] \quad J_{I,B}(0,y) = 1$;

(iii) $\forall y \in [0,1] \quad J_{I,B}(1,y) = I(1,y)$;

(iv) $\forall x \in [0,1] \quad J_{I,B}(x,0) = I(x,0)$;

(v) $\forall x \in [0,1] \quad J_{I,B}(x,1) = I(x,x)$.

Twierdzenie 3.29 ([5, Theorem 4.4]). *Funkcja $J_{I,B}$ jest implikacją rozmytą wtedy i tylko wtedy, gdy $J_{I,B}$ spełnia (**I1**).*

Dowód.

$\Rightarrow$ Załóżmy, że funkcja $J_{I,B}$ określona wzorem (3.2) jest implikacją rozmytą. W szczególności spełnia (**I1**).

$\Leftarrow$ Załóżmy, że funkcja $J_{I,B}$ określona wzorem (3.2) spełnia (**I1**). Z lematu 3.28, zachodzi warunek (**I2**) dla funkcji $J_{I,B}$ oraz

$$\begin{aligned} J_{I,B}(0,0) &= 1, \\ J_{I,B}(1,1) &= I(1,1) = 1, \\ J_{I,B}(1,0) &= I(1,0) = 0, \end{aligned}$$

gdy I jest implikacją rozmytą. Stąd otrzymujemy, że $J_{I,B}$ spełnia wszystkie warunki by być implikacją rozmytą. □

Lemat 3.30 ([5, Lemma 4.5]). *Jeśli funkcja $J_{I,B}$ określona wzorem* (3.2) *jest implikacją rozmytą, to I musi spełniać* (IP).

Dowód. Istotnie, z warunku (**I1**) wynika, że $1 = J_{I,B}(1,1) \le J_{I,B}(x,1)$, dla wszystkich $x \in [0,1]$. Z lematu 3.28 wiemy, że $J_{I,B}(x,1) = I(x,x)$, stąd $I(x,x) = 1$, dla wszystkich $x \in [0,1]$. □

Jak pokazuje następujący przykład, własność identyczności (IP) nie jest warunkiem koniecznym by funkcja $J_{I,B}$ określona wzorem (3.2) była implikacją rozmytą.

Przykład 3.31 ([5, Example 4.6]). Implikacja $I_{\mathbf{FD}}$ spełnia (IP) jako R-implikacja generowana z t-normy lewostronnie ciągłej ($I_{\mathbf{FD}} = T_{\mathbf{nM}}$). Natomiast funkcja $J_{I_{\mathbf{FD}},T_{\mathbf{nM}}}$ następującej postaci

$$J_{I_{\mathbf{FD}},T_{\mathbf{nM}}}(x,y) = \begin{cases} 1, & x = 0 \text{ lub } (x \le y \text{ i } x + y > 1), \\ 1 - x, & x > 0 \text{ i } x + y \le 1, \\ y, & \text{w przeciwnym przypadku}, \end{cases}$$

nie jest implikacją rozmytą, ponieważ $\frac{2}{3} = J_{I_{\mathbf{FD}},T_{\mathbf{nM}}}(\frac{1}{3},\frac{2}{3}) < J_{I_{\mathbf{FD}},T_{\mathbf{nM}}}(\frac{2}{3},\frac{2}{3}) = 1$.

Twierdzenie 3.32 ([5, Proposition 4.11]). *Niech T oznacza t-normę ścisłą oraz niech $I = I_T$ będzie implikacją indukowaną generowaną z t-normy T. Wtedy*

$$J_{I_T,T}(x,y) = \begin{cases} 1, & x = 0 \textit{ lub } y = 1 \\ y, & \textit{w przeciwnym przypadku} \end{cases}. \tag{3.3}$$

Dowód. Na mocy uwagi 1.25, każdą t-normę ścisłą T można zapisać w postaci

$$T(x,y) = f^{-1}(f(x) + f(y)), \qquad x, y \in [0,1],$$

dla wszystkich $x, y \in [0,1]$, gdzie $f\colon [0,1] \to [0,\infty]$ jest funkcją ciągłą, ściśle malejącą, spełniającą warunek $f(1) = 0$. Natomiast,

$$I_T(x,y) = f^{-1}(\max\{f(y) - f(x), 0\}), \quad x, y \in [0,1],$$

gdzie f jest generatorem addytywnym t-normy T (patrz [6, Theorem 2.5.21]). Wtedy

$$\begin{aligned} J_{I_T,T}(x,y) &= I_T(x, T(x,y)) \\ &= I_T(x, f^{-1}(f(x) + f(y))) \\ &= f^{-1}(\max\{(f(x) + f(y)) - f(x), 0\}) \\ &= f^{-1}(\max\{f(y), 0\}). \end{aligned}$$

Jeśli $f(y) > 0$, to powyższe wyrażenie jest równe $f^{-1}(f(y)) = y$, i jeśli $f(y) = 0$, to $f^{-1}(0) = 1$, gdy $y = 1$. Oczywiście $J_{I_T,T}(0,y) = 1$, skąd

$$J_{I_T,T}(x,y) = \begin{cases} 1, & x = 0 \text{ lub } y = 1, \\ y, & \text{w przeciwnym przypadku}, \end{cases}$$

co kończy dowód. □

Przykład 3.33 ([5, Example 4.12]). Jeśli t-norma T jest nilpotentna, to powyższy dowód się nieco komplikuje, mianowicie

$$\begin{aligned} J_{I_T,T}(x,y) &= I_T(x,T(x,y)) \\ &= I_T(x, f^{-1}(\min\{f(x)+f(y), f(0)\})) \\ &= f^{-1}(\max\{\min\{f(x)+f(y), f(0)\} - f(x), 0\}) \\ &= f^{-1}(\max\{\min\{f(y), f(0)-f(x)\}, 0\}) \\ &= f^{-1}(\min\{f(y), f(0)-f(x)\}) \\ &= \max\{y, f^{-1}(f(0)-f(x))\} \\ &= \max\{y, N_f(x)\}, \end{aligned}$$

gdzie $N_f(x) = f^{-1}(f(0) - f(x))$ jest malejącą funkcją, $N_f(0) = 1$ i $N_f(1) = 0$, czyli N_f jest negacją rozmytą. Korzystając z faktu, iż max jest t-konormą, $J_{I_T,T}$ jest (S,N)-implikacją. W przypadku t-normy Łukasiewicza

$$T_{\mathbf{LK}}(x,y) = \max\{x+y-1, 0\},$$

dla addytywnego generatora $f(x) = 1-x$, otrzymujemy implikację Kleene-Dienesa

$$J_{I_{T_{\mathbf{LK}}},T_{\mathbf{LK}}}(x,y) = \max\{1-x, y\} = I_{\mathbf{KD}}(x,y).$$

Lemat 3.34 ([5, Proposition 4.13]). *Niech I będzie implikacją rozmytą, która spełnia* (NP) *i niech B będzie semikopułą. Wówczas funkcja $J_{I,B}$ także spełnia* (NP).

Dowód. Niech $y \in [0,1]$. Wówczas

$$J_{I,B}(1,y) = I(1, B(1,y)) = I(1,y) = y, \text{ co dowodzi tezy.}$$

□

3.4 Warunek Lipschitza dla implikacji

Okazuje się, że to, czy dana implikacja rozmyta spełnia warunek Lipschitza zależy, od tego, czy można ją zapisać przy pomocy pewnej quasikopuły. Do dowodu tego faktu potrzebujemy następującego lematu.

Lemat 3.35 ([5, Lemma 2.8]). *Negacja klasyczna $N_{\mathbf{C}}(x) = 1-x$ jest jedyną negacją rozmytą spełniającą warunek 1-Lipschitza, czyli $|N_{\mathbf{C}}(x_1) - N_{\mathbf{C}}(x_2)| \le |x_1 - x_2|$, dla wszystkich $x_1, x_2 \in [0,1]$.*

Dowód. Oczywiście negacja klasyczna $N_{\mathbf{C}}$ spełnia warunek 1-Lipschitza. Przypuśćmy, że f jest 1-lipschitzowską negacją rozmytą różna od $N_{\mathbf{C}}$. Wtedy, istnieje taki $x \in (0,1)$, że $f(x) \neq N_{\mathbf{C}}(x)$, więc $f(x) > 1-x$ lub $f(x) < 1-x$. Jeśli $f(x) > 1-x$, to $|f(x) - f(1)| \le |x-1|$, i stąd $1-x < f(x) \le 1-x$, co jest sprzeczne. Z drugiej strony, jeśli $f(x) < 1-x$, to $|f(x) - f(0)| \le x$, więc $1-x \le f(x) < 1-x$, co jest także sprzeczne. □

Twierdzenie 3.36 ([5, Lemma 2.13]). *Niech I będzie implikacją rozmytą. Wtedy I jest 1-lipschitzowska wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$I(x,y) = 1 - Q(x, 1-y), \qquad x,y \in [0,1],$$

dla pewnej quasikopuły Q.

Dowód.

$\Rightarrow$ Załóżmy, że I jest 1-lipschitzowską implikacją rozmytą. Definiujemy funkcję $Q\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ następująco:

$$Q(x,y) = 1 - I(x, 1-y) \qquad x, y \in [0,1].$$

Ustalmy $x, y \in [0,1]$. Wtedy z (**I1**), (**I3**) mamy $Q(x,0) = 1 - I(x,1) = 1 - 1 = 0$, wykorzystując (**I2**) i (**I3**) otrzymujemy, że $Q(0,y) = 1 - I(0, 1-y) = 1 - 1 = 0$, to oznacza, że Q spełnia (**C1**). Ponieważ I jest 1-lipschitzowska, stąd z lematu 3.35 naturalna negacja I jest negacją klasyczną, $N_I(x) = N_{\mathbf{C}}(x) = 1 - x$. Natomiast

$$Q(x,1) = 1 - I(x,0) = 1 - (1-x) = x,$$

czyli warunek (**C2**) zachodzi. Przyjrzyjmy się teraz równaniu $Q(1,y) = 1 - I(1, 1-y)$. Z definicji implikacji rozmytej funkcja $N(y) = I(1, 1-y)$ jest negacją rozmytą. Jak wcześniej z lematu 3.35, ponieważ I jest 1-lipschitzowska, stąd

$$N(y) = I(1, 1-y) = N_{\mathbf{C}}(y) = 1 - y \text{ i ostatecznie } Q(1,y) = 1 - (1-y) = y,$$

czyli warunek (**C3**) zachodzi. Ustalmy takie $x_1, x_2, y_1, y_2 \in [0,1]$, że $x_1 \le x_2$ i $y_1 \le y_2$. Z (**I1**) i (**I2**) otrzymujemy, że $Q(x_1,y_1) \le Q(x_2,y_2)$, więc Q jest niemalejąca ze względu na każdą zmienną. Ponadto, ponieważ I jest 1-lipschitzowska, stąd

$$\begin{aligned}|Q(x_1,y_1) - Q(x_2,y_2)| &= |I(x_1, 1-y_1) - I(x_2, 1-y_2)| \\ &\le |x_1 - x_2| + |1 - y_1 - (1-y_2)| = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|,\end{aligned}$$

czyli Q spełnia warunek 1-Lipschitza. Zatem Q spełnia (**C1**), (**C2**), (**C3**), (ND) oraz (Lip), więc Q jest quasikopułą.

$\Leftarrow$ Z drugiej strony, niech

$$I(x,y) = 1 - Q(x, 1-y), \qquad x, y \in [0,1],$$

dla pewnej quasikopuły Q. Wówczas

$$\begin{aligned}|I(x_1,y_1) - I(x_2,y_2)| &= |Q(x_2, 1-y_2) - Q(x_1, 1-y_1)| \\ &\le |x_1 - x_2| + |1 - y_2 - (1-y_1)| = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|,\end{aligned}$$

więc I jest 1-lipschitzowska, co kończy dowód twierdzenia. □

Następujące twierdzenie pokazuje, kiedy funkcje postaci (3.2) spełniają warunek Lipschitza.

Twierdzenie 3.37 ([5, Theorem 4.7]). *Niech $J_{I,B}$ będzie funkcją zdefiniowana przez* (3.2)*, opartą na* 1*-lipschitzowskiej implikacji rozmytej I i* 1*-lipschitzowskiej semikopule B. Jeśli $J_{I,B}$ jest implikacją rozmytą, to $J_{I,B}$ jest* 1*-lipschitzowska.*

Dowód. Dla dowolnych takich $x, y \in [0,1]$, $\varepsilon, \eta \in (-1,1)$, że $x + \varepsilon, y + \eta \in [0,1]$ mamy

$$\begin{aligned}|J_{I,B}(x+\varepsilon, y+\eta) - J_{I,B}(x,y)| \le\ & |J_{I,B}(x+\varepsilon, y+\eta) - J_{I,B}(x+\varepsilon, y)| \\ & + |J_{I,B}(x+\varepsilon, y) - J_{I,B}(x,y)|. \qquad (3.4)\end{aligned}$$

Pokażemy wpierw, że $|J_{I,B}(x+\varepsilon, y+\eta) - J_{I,B}(x+\varepsilon, y)| \leq \eta$. Istotnie, jeśli $\eta > 0$, to stąd, że I jest 1-lipschitzowska i stąd, że B jest 1-lipschitzowska i monotoniczna, otrzymujemy

$$I(x+\varepsilon, B(x+\varepsilon, y+\eta)) \leq I(x+\varepsilon, B(x+\varepsilon, y)+\eta) \leq J_{I,B}(x+\varepsilon, y)+\eta.$$

Z warunku (**I2**) dla $J_{I,B}$ otrzymujemy, że $0 \leq J_{I,B}(x+\varepsilon, y+\eta) - J_{I,B}(x+\varepsilon, y) \leq \eta$. Jeśli $\eta < 0$, to

$$I(x+\varepsilon, B(x+\varepsilon, y+\eta)) \geq I(x+\varepsilon, B(x+\varepsilon, y)+\eta) \geq J_{I,B}(x+\varepsilon, y)-\eta$$

oraz $0 \geq J_{I,B}(x+\varepsilon, y+\eta) - J_{I,B}(x+\varepsilon, y) \geq -\eta$.

Ponadto zachodzi nierówność $|J_{I,B}(x+\varepsilon, y) - J_{I,B}(x, y)| \leq \varepsilon$. Istotnie, jeśli $\varepsilon > 0$, to korzystając z faktu iż I jest 1-lipschitzowska i z monotoniczności B, otrzymujemy

$$J_{I,B}(x+\varepsilon, y) = I(x+\varepsilon, B(x+\varepsilon, y)) \geq I(x, B(x+\varepsilon, y)) - \varepsilon \geq J_{I,B}(x, y) - \varepsilon.$$

Z warunku (**I1**) funkcji $J_{I,B}$ otrzymujemy

$$0 \leq J_{I,B}(x, y) - J_{I,B}(x+\varepsilon, y) \leq J_{I,B}(x, y) - J_{I,B}(x, y) + \varepsilon = \varepsilon.$$

Jeśli $\varepsilon < 0$, to

$$J_{I,B}(x+\varepsilon, y) = I(x+\varepsilon, B(x+\varepsilon, y)) \leq I(x, B(x+\varepsilon, y)) - \varepsilon \leq J_{I,B}(x, y) - \varepsilon,$$

co w ostateczności daje, $0 \leq I(x+\varepsilon, B(x+\varepsilon, y)) - I(x, B(x, y)) \leq -\varepsilon$. W końcu, wstawiając te nierówności do (3.4) otrzymujemy

$$|J_{I,B}(x+\varepsilon, y+\eta) - J_{I,B}(x, y)| \leq |\varepsilon| + |\eta|,$$

co dowodzi, że implikacja $J_{I,B}$ jest 1-lipschitzowska. □

3.5 Przykłady funkcji postaci $I(x, B(x, y))$

Następujące przykłady pokazują, jak wyglądają funkcje postaci (3.2) dla najczęściej występujących w literaturze semikopuł i implikacji rozmytych.

Przykład 3.38 ([5, Example 4.8])**.** Niech $T_{\mathbf{D}}$ będzie t-normą drastyczną, a I implikacją rozmytą. Wówczas

$$J_{I,T_D}(x, y) = \begin{cases} I(1, y), & x = 1, \\ I(x, x), & y = 1, \\ I(x, 0), & \text{w przeciwnym przypadku}, \end{cases}$$

jest implikacją rozmytą wtedy i tylko wtedy, gdy I spełnia (IP) i $I(1^-, 0) \geq I(1, 1^-)$. Oczywiście każda implikacją ciągła nie spełnia tego warunku. Przykładem implikacji spełniającą tą nierówność jest implikacja Webera $I_{\mathbf{WB}} = I_{T_D}$.

Przykład 3.39 ([5, Example 4.9])**.** Niech semikopuła B będzie równa największej semikopule, czyli $B = T_{\mathbf{M}}$. Wtedy

$$J_{I,T_{\mathbf{M}}}(x,y) = \begin{cases} I(x,x), & x \le y, \\ I(x,y), & x > y, \end{cases}$$

jest implikacją rozmytą dla implikacji rozmytej I tylko wtedy, gdy I spełnia (IP). Istotnie, jeśli $I(x_0, x_0) < 1$, dla pewnego $x_0 \in (0,1)$, to z lematu 3.28

$$J_{I,T_{\mathbf{M}}}(x_0, 1) < 1,$$

co przeczy warunkowi (**I1**). Ponadto, jeśli I spełnia (IP), to z monotoniczności

$$1 = I(x,x) \le I(x,y) \le 1,$$

czyli $I(x,y) = 1$, dla wszystkich $x \le y$. Wówczas $J_{I,T_{\mathbf{M}}} = I$, dla implikacji I spełniającej (IP).

Przykład 3.40 ([5, Example 4.10])**.** Rozważmy implikację Gödela $I = I_{\mathbf{GD}}$, (R-implikacja generowana z największej semikopuły $T_{\mathbf{M}}$), gdzie

$$I_{\mathbf{GD}}(x,y) = \begin{cases} 1, & x \le y, \\ y, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases} \tag{3.5}$$

Wtedy

$$J_{I_{\mathbf{GD}},B}(x,y) = \begin{cases} 1, & x = B(x,y), \\ B(x,y), & x > B(x,y), \end{cases}$$

jest implikacją rozmytą wtedy i tylko wtedy, gdy $B(x,y) = \min\{x,y\}$, czyli

$$J_{I_{\mathbf{GD}},B}(x,y) = I_{\mathbf{GD}}(x,y), \qquad x,y \in [0,1].$$

Istotnie załóżmy, że $J_{I_{\mathbf{GD}},B}$ jest implikacja rozmytą dla pewnej semikopuły B. Wiadomo, że jeśli $x > y$, to $B(x,y) \le B(1,y) = y < x$, stąd dla ustalonego $y_0 \in [0,1)$ mamy

$$J_{I_{\mathbf{GD}},B}(x,y_0) = B(x,y_0),$$

dla wszystkich $x > y_0$. Z definicji semikopuły funkcja $B(\cdot, y_0)$ jest niemalejąca ze względu na pierwszą zmienną. Jednocześnie ponieważ implikacja $J_{I_{\mathbf{GD}},B}$ spełnia (**I1**), więc jest nierosnąca ze względu na pierwszą zmienną. Otrzymujemy, że $B(\cdot, y_0)$ jest funkcją stałą, dla wszystkich $x > y_0$. Tymczasem $B(1, y_0) = y_0$ i stąd

$$B(x, y_0) = y_0,$$

dla ustalonego y_0 i dla wszystkich $x > y_0$. Zatem $x - \varepsilon \le B(x, x-\varepsilon) \le B(x,x) \le x$, dla $x \ge \varepsilon \ge 0$. Wówczas, gdy $\varepsilon \to 0^+$, to $x = B(x,x) \le B(x,y) \le x$, dla $x \le y$. W związku z tym $B(x,y) = \min\{x,y\}$, co kończy dowód.

Klasa funkcji postaci (3.2) jest dość szeroką klasą zawierającą wiele innych znanych klas.

Przykład 3.41 ([5, Example 4.14]). Niech T będzie t-normą (każda t-norma jest semikopułą) i niech $I_{S,N}(x,y) = S(N(x),y)$ będzie (S,N)-implikacją. Wtedy stosując wzór (3.2), funkcja

$$J_{I_{S,N},T}(x,y) = S(N(x),T(x,y)),$$

jest QL-operatorem, czyli wszystkie QL-operatory są funkcjami postaci (3.2).

Definicja 3.42 ([5, Definition 3.1]). Niech C będzie kopułą, a J funkcją postaci (3.2). Funkcję $I\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ określoną dla dowolnych $x,y \in [0,1]$ następująco

$$I(x,y) = J_{I_{\mathbf{GG}},C}(x,y) = \begin{cases} 1, & x = C(x,y) \\ \frac{C(x,y)}{x}, & x > C(x,y) \end{cases} = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ \frac{C(x,y)}{x}, & x > 0, \end{cases}$$

nazywamy **implikacją probabilistyczną** (opartą na kopule C) i oznaczamy przez I_C^p. Zbiór wszystkich implikacji probabilistycznych oznaczamy przez $\mathbb{I}_{\mathbb{C}}^{prob}$.

Przyporządkowanie kopule implikacji probabilistycznej zachodzi w sposób jednoznaczny.

Uwaga 3.43. Niech C_1, C_2 będą kopułami. Wówczas, gdy $I_{C_1}^p = I_{C_2}^p$, to $C_1 = C_2$.

Dowód. Niech $x,y \in [0,1]$ i $x > 0$, wtedy $\frac{C_1(x,y)}{x} = \frac{C_2(x,y)}{x}$, czyli $C_1(x,y) = C_2(x,y)$. Oczywiście $C_1(0,y) = C_2(0,y)$, stąd $C_1 = C_2$. □

Definicja 3.44 ([5, Definition 3.2]). Niech C będzie kopułą, a J funkcją postaci (3.2). Funkcję $I\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ określoną dla dowolnych $x,y \in [0,1]$ następująco

$$I(x,y) = J_{I_{\mathbf{LK}},C}(x,y) = \begin{cases} 1, & x = C(x,y) \\ 1 - x + C(x,y), & x > C(x,y) \end{cases} = C(x,y) - x + 1,$$

nazywamy **implikacją s-probabilistyczną** (opartą na kopule C) i oznaczamy przez I_C^{sp}. Zbiór wszystkich implikacji s-probabilistycznych oznaczamy przez $\mathbb{I}_{\mathbb{C}}^{sprob}$.

Przyporządkowanie kopule implikacji s-probabilistycznej także zachodzi w sposób jednoznaczny.

Uwaga 3.45. Niech C_1, C_2 będą kopułami. Wówczas, gdy $I_{C_1}^{sp} = I_{C_2}^{sp}$, to $C_1 = C_2$.

Dowód. Niech $x,y \in [0,1]$, wtedy $1 - x + C_1(x,y) = 1 - x + C_2(x,y)$, czyli $C_1 = C_2$. □

Klasy implikacji probabilistycznych i s-probabilistycznych są domknięte na kombinacje wypukłe. Istotnie, dla dowolnego $\lambda \in [0,1]$ i dowolnych implikacji probabilistycznych $I_{C_1}^p, I_{C_2}^p$ opartych na kopułach C_1 i C_2 odpowiednio, funkcja $K = \lambda I_{C_1}^p + (1-\lambda) I_{C_2}^p$ określona wzorem

$$\begin{aligned} K(x,y) &= (\lambda I_{C_1}^p + (1-\lambda) I_{C_2}^p)(x,y) \\ &= \lambda I_{C_1}^p(x,y) + (1-\lambda) I_{C_2}^p(x,y) \\ &= \begin{cases} 1, & \text{if } x = 0, \\ \frac{\lambda C_1(x,y) + (1-\lambda) C_2(x,y)}{x}, & \text{if } x > 0, \end{cases} \end{aligned}$$

jest implikacją probabilistyczną, ponieważ kombinacja wypukła kopuł jest kopułą (patrz 1.59). Stosując podobne rozumowanie do implikacji s-probabilistycznych. Niech $\lambda \in [0,1]$ i niech $I^{sp}_{C_1}, I^{sp}_{C_2}$ będą implikacjami s-probabilistycznymi opartymi na kopułach C_1, C_2 odpowiednio. Funkcja $K = \lambda I^{sp}_{C_1} + (1-\lambda) I^{sp}_{C_2}$ określona wzorem

$$\begin{aligned}
K(x,y) &= (\lambda I^{sp}_{C_1} + (1-\lambda) I^{sp}_{C_2})(x,y) \\
&= \lambda I^{sp}_{C_1}(x,y) + (1-\lambda) I^{sp}_{C_2}(x,y) \\
&= \lambda (C_1(x,y) - x + 1) + (1-\lambda)(C_2(x,y) - x + 1) \\
&= \lambda C_1(x,y) + (1-\lambda) C_2(x,y) - x + 1.
\end{aligned}$$

jest implikacją s-probabilistyczną opartą na kopule $\lambda C_1 + (1-\lambda) C_2$.

Definicja 3.46 ([26, Definition 4])**.** Niech C będzie kopułą. Funkcję $I\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ określoną dla dowolnych $x, y \in [0,1]$ następująco

$$\begin{aligned}
I(x,y) = I^p_{C^*}(x,y) &= \begin{cases} 1, & x = 0 \\ \frac{C^*(x,y)}{x}, & x > 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1, & x = 0, \\ \frac{x+y-1+C(1-x,1-y)}{x}, & x > 0, \end{cases}
\end{aligned} \tag{3.6}$$

nazywamy **implikacją dualną** (opartą na kopule C) i oznaczamy I^d_C. Zbiór wszystkich implikacji dualnych będziemy oznaczać przez $\mathbb{I}^d_{\mathbb{C}}$.

Okazuje się, że zbiór implikacji probabilistycznych i zbiór implikacji dualnych są sobie równe.

Uwaga 3.47.

$$\mathbb{I}^{prob}_{\mathbb{C}} = \mathbb{I}^d_{\mathbb{C}}.$$

Dowód. Ponieważ na mocy lematu 1.66 dla każdej kopuły C funkcja C^* jest także kopułą, więc $\mathbb{I}^d_{\mathbb{C}} \subseteq \mathbb{I}^{prob}_{\mathbb{C}}$. Z drugiej strony niech $I^p_C \in \mathbb{I}^{prob}_{\mathbb{C}}$, dla pewnej kopuły C. Wtedy ponieważ operacja $*$ jest inwolucją (patrz lemat 1.65), to $I^d_{C^*} = I^p_{(C^*)^*} = I^p_C$, czyli $I^p_C \in \mathbb{I}^d_{\mathbb{C}}$. □

Definicja 3.48 ([26, Definition 6])**.** Niech C będzie kopułą. Funkcję $I\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ określoną następująco

$$I(x,y) = I^{sp}_{C^*}(x,y) = C^*(x,y) - x + 1 = C(1-x, 1-y) + y, \tag{3.7}$$

dla wszystkich $x, y \in [0,1]$, nazywamy **implikacją s-dualną** (opartą na kopule C) i oznaczamy przez I^{sd}_C. Zbiór wszystkich implikacji s-dualnych będziemy oznaczać przez $\mathbb{I}^{sd}_{\mathbb{C}}$.

Analogicznie jak w przypadku implikacji probabilistycznych i implikacji dualnych dowodzimy, zbiory implikacji s-probabilistycznych i zbiory implikacji s-dualnych są sobie równe.

Uwaga 3.49.

$$\mathbb{I}^{sprob}_{\mathbb{C}} = \mathbb{I}^{sd}_{\mathbb{C}}.$$

Wprost ze wzorów (3.6) i (3.7) otrzymujemy następujący wniosek.

Wniosek 3.50 ([26, Lemma 2, Lemma 3]). *Jeżeli* $C^* = C$, *to* $I_C^d = I_C^p$ *i* $I_C^{sd} = I_C^{sp}$. *Ponadto, gdy* $I_C^d = I_C^p$, *to* $C^* = C$ *i gdy* $I_C^{sd} = I_C^{sp}$, *to* $C^* = C$.

Na mocy uwag 3.47, 3.49 własności dla implikacji dualnych (s-dualnych) są analogiczne jak własności dla implikacji probabilistycznych (s-probabilistycznych). Natomiast bez uwzględnienia tego faktu wyznaczone własności implikacji dualnych i s-dualnych można znaleźć w pracy [29].

Przykład 3.51 ([29, Example 2.16]). Niech $C(x,y) = \min(\sqrt{x}y, x\sqrt{y})$, gdzie funkcja C jest kopułą należącą do rodziny Cuadras-Augé. Ponadto, $C^* \neq C$. Istotnie, dla $x = y = \frac{1}{3}$ otrzymujemy, że $C^* \neq C$. Stąd, $I_C^{sd} \neq I_C^{sp}$ i $I_C^d \neq I_C^p$.

Rozdział 4

Probabilistyczny punkt wyjścia

Rachunek prawdopodobieństwa jest teorią, która ma wiele wspólnego z logiką rozmytą. Jednym z podstawowych pojęć w rachunku prawdopodobieństwa jest pojęcie prawdopodobieństwa, czyli funkcji określonej na przestrzeń zdarzeń przyjmującej wartości w przedziale $[0,1]$. W logice rozmytej mamy spójniki logiczne przyjmujące wartości w przedziale $[0,1]$. Wydaje się naturalne, że musi istnieć pewna analogia pomiędzy tymi dwoma teoriami (patrz [14]). W tym rozdziale rozpatrzymy pewne implikacje, które mają swoje źródło w rachunku prawdopodobieństwa.

4.1 Implikacje probabilistyczne

W poprzednim rozdziale zdefiniowaliśmy implikacje probabilistyczne jako szczególne funkcje generowane przy pomocy wzoru (3.2). Można je otrzymać w inny sposób. Mianowice w rachunku prawdopodobieństwa mamy pojęcie prawdopodobieństwa warunkowego

$$P(B|A) = \begin{cases} 1, & A = \emptyset, \\ \frac{P(A\cap B)}{P(A)}, & A \neq \emptyset. \end{cases}$$

Prawdopodobieństwa warunkowe mówi o tym jakie jest prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia B pod warunkiem zajścia zdarzenia A. W logice mamy regułę *modus ponens* która mówi, że jeżeli formuły A i $A \to B$ są „prawdziwe", to wtedy formuła B jest „prawdziwa". Cudzysłów w przymiotniku prawdziwa bierze się stąd, że w logice rozmytej operujemy na wartościach z przedziału $[0,1]$. Łącząc te dwa fakty można zdefiniować na nowo implikacje probabilistyczna. Zanim do tego dojdziemy zacytujmy jedno z podstawowych twierdzeń w probabilistyce, łączące kopuły z dystrybuantami.

Twierdzenie 4.1 (Sklar)**.** *[49, Theorem 2.3.3] Niech X oraz Y będą zmiennymi losowymi ze wspólną dystrybuantą H i brzegowymi dystrybuantami F oraz G, odpowiednio. Wtedy istnieje taka kopuła C, że*

$$H(x,y) = C(F(x), G(y)), \tag{4.1}$$

dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$. Jeśli F i G są ciągłe, wtedy istnieje jedyne takie C. Ponadto kopuła C jest jednoznacznie zdeterminowana w $Ran(F) \times Ran(G)$. Z drugiej strony, jeśli C jest kopułą oraz F i G dystrybuantami, to funkcja H zdefiniowana tak jak w (4.1) jest taką łączną dystrybuantą, że F i G są jej dystrybuantami brzegowymi.

Podobnie jak w twierdzeniu Sklara, niech X oraz Y będą zmiennymi losowymi ze wspólną dystrybuantą H oraz niech C będzie taka kopuła jak we wzorze (4.1). Wówczas, gdy $P(X \geq x) > 0$, to

$$P(Y \leq y \mid X \leq x) = \frac{P(Y \leq y, X \leq x)}{P(X \leq x)} = \frac{H(x,y)}{F(x)} = \frac{C(F(x), G(y))}{F(x)} = \frac{C(u,v)}{u},$$

gdzie $u = F(x)$, $v = G(y)$. Mając daną kopułę C i utożsamiając prawdopodobieństwo warunkowe z implikacją, otrzymujmy następującą implikację probabilistyczną

$$I_C^p(u,v) = \begin{cases} 1, & u = 0 \\ \frac{C(u,v)}{u}, & u > 0 \end{cases}.$$

Implikacje probabilistyczne są oczywiście funkcjami z definicji 3.42, i jako funkcje tej postaci spełniają (**I2**) oraz (**I3**). Okazuje się, że nie wszystkie implikacje probabilistyczne są implikacjami rozmytymi.

Twierdzenie 4.2 ([27, Theorem 6]). *Implikacja probabilistyczna I_C^p oparta na kopule C jest implikacją rozmytą wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$C(x_1, y)x_2 \leq C(x_2, y)x_1, \tag{4.2}$$

dla każdych takich $x_1, x_2, y \in [0,1]$, że $x_1 \leq x_2$.

Dowód. Z twierdzenia 3.29 funkcja I_C^p jest implikacją rozmytą wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia (**I1**). Ponieważ $I_C^p(0,y) = 1$, dla każdego $y \in [0,1]$, wystarczy by funkcja $I(\cdot, y)$ była funkcją nierosnącą, dla $y \in [0,1]$, a to sprowadza się do warunku (4.2). □

Oto kilka przykładów implikacji probabilistycznych.

Przykład 4.3. Niech $C = M$, wtedy

$$I_C^p(x,y) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ \frac{\min(x,y)}{x}, & x > 0 \end{cases} = \begin{cases} 1, & x \leq y, \\ \frac{y}{x}, & x > y, \end{cases} = I_{\mathbf{GG}}(x,y).$$

Przykład 4.4. Niech $C = \Pi$, wtedy

$$I_C^p(x,y) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ \frac{xy}{x}, & x > 0 \end{cases} = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ y, & x > 0, \end{cases} = I_{\mathbf{D}}(x,y).$$

Przykład 4.5. Niech $C = W$ wtedy implikacja probabilistyczna

$$I_C^p(x,y) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ \frac{\max(x+y-1,0)}{x}, & x > 0, \end{cases}$$

nie jest implikacją rozmytą, ponieważ $0 = I_C^p(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) < I_C^p(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{3}$.

Przykład 4.6. Niech $f\colon [0,\infty] \to [0,1]$ będzie addytywnym generatorem kopuły archimedesowej (f jest ciągła, ściśle malejąca, wypukła oraz $f(1)=0$), definiujemy funkcję g następująco $g(x)=f(1-x)$. Wtedy funkcje C_f i C_g określone następująco

$$C_f(x,y)=\begin{cases}0, & x=0,\\ xf^{-1}(\min\{f(0),\frac{f(y)}{x}\}), & x>0,\end{cases}$$

$$C_g(x,y)=\begin{cases}0, & x=0,\\ xg^{-1}(\min\{g(1),\frac{g(y)}{x}\}), & x>0,\end{cases}$$

są kopułami (patrz [15, Proposition 3.1]). Ponadto, $C_f \le \Pi$ i funkcja $I^p_{C_f}$ nie jest implikacją rozmytą, dla każdego f. Z drugiej strony $C_g \ge \Pi$ i $I^p_{C_g}$ jest implikacją rozmytą, dla każdego g.

Przykład 4.7. Inspirując się kopułami archimaxowymi [10], w pracy [46] autorzy zdefiniowali klasę kopuł DUCS (ang. *Distorted Univariate Conditioning Stable*). Funkcję $C_{f,d} : [0,1]^2 \to [0,1]$, gdzie f jest generatorem (patrz przykład 4.6), a funkcja $d : [0,1] \to [0,1]$ jest taką funkcją ciągłą niemalejącą, że istnieje taka funkcja niemalejąca $\tilde{d} : [0,1] \to [0,1]$, że $d(x)\tilde{d}(x)=x$ dla wszystkich $x\in[0,1]$, następującej postaci

$$C_{f,d}(x,y)=\begin{cases}0, & x=0,\\ xf^{-1}(\min\{f(0),\frac{f(y)}{d(x)}\}), & x>0,\end{cases}$$

nazywamy kopułą DUCS. Funkcja $C_{f,d}$ jest kopułą (patrz Proposition 3.1 [46]). Analogicznie definiujemy kopułę DUCS $C_{g,d}$, gdzie $g(x)=f(1-x)$, czyli

$$C_{g,d}(x,y)=\begin{cases}0, & x=0,\\ xg^{-1}(\min\{g(1),\frac{g(y)}{d(x)}\}), & x>0.\end{cases}$$

Tak określona funkcja jest także kopułą i spełnia równanie $C_{g,d}(x,y)=x-C_{f,d}(x,1-y)$. Funkcję d nazywamy deformacją. Największa deformacja jest równa $d^*(x)=1$. Dla każdego generatora f i największej deformacji otrzymujemy $C_{f,d^*}=C_{g,d^*}=\Pi$, czyli produktowa kopuła jest największą f-generowaną kopułą DUCS (najmniejszą g-generowaną kopuła DUCS). Najmniejsza deformacja jest równa $d_*(x)=x$.

Podobnie jak w przykładzie 4.6, implikacja probabilistyczna generowana z kopuły $C_{g,d}$ jest implikacją rozmytą. Ponadto, dla $g(x)=x$ otrzymujemy $\frac{C_{g,d}(x,y)}{x}=\min(1,\frac{y}{d(x)})$, stąd dla d_* otrzymujemy implikację Goguena.

4.2 Implikacje s-probabilistyczne

W logice klasycznej mamy następującą tautologię

$$A \longrightarrow B \equiv \neg A \vee B.$$

Idea konstrukcji implikacji s-probabilistycznych polega na tym by utożsamić implikację $A \longrightarrow B$ z wyrażeniem $P(A' \cup B)$.
Dla każdej przestrzeni probabilistycznej $(\Omega,\mathcal{F},P)$ i dwóch zdarzeń $A,B\in\mathcal{F}$ mamy

$$\begin{aligned}P(A'\cup B)&=P(A')+P(B)-P(A'\cap B)\\&=P(A')+P(B\cap A)+P(B\cap A')-P(A'\cap B)=P(A')+P(A\cap B),\end{aligned}$$

wstawiając $P(A') = 1 - P(A)$, otrzymujemy

$$P(A' \cup B) = P(A \cap B) - P(A) + 1. \tag{4.3}$$

Załóżmy teraz, że $A = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}$ i $B = \{\omega \in \Omega : Y(\omega) \leq y\}$. Niech H będzie dystrybuantą zmiennej losowej (X, Y), oraz niech F i G będą odpowiednio dystrybuantami brzegowymi X i Y. Wówczas, gdy C jest taką kopułą, że spełnia zależność (4.1), to:

$$\begin{aligned} P(X > x \text{ lub } Y \leq y) &= P(X \leq x, Y \leq y) - P(X \leq x) + 1 \\ &= H(x, y) - F(x) + 1 \\ &= C(F(x), G(y)) - F(x) + 1 \\ &= C(u, v) - u + 1, \end{aligned}$$

gdzie $u = F(x), v = G(y)$. Stosując powyższą analogię dla danej kopuły C definiujemy implikację s-probabilistyczną I_C^{sp} następująco:

$$I_C^{sp}(u, v) = C(u, v) - u + 1, \qquad u, v \in [0, 1].$$

Implikacje s-probabilistyczne są oczywiście funkcjami z definicji 3.44. W odróżnieniu od implikacji probabilistycznych implikacje s-probabilistyczne są zawsze implikacjami rozmytymi.

Twierdzenie 4.8 ([27, Theorem 20])**.** *Niech C będzie kopułą. Wtedy implikacja s-probabilistyczna I_C^{sp} jest implikacją rozmytą.*

Dowód. Z twierdzenia 3.29 wynika, że wystarczy sprawdzić tylko warunek (**I1**). W tym celu załóżmy, że elementy $x_1, x_2 \in [0, 1]$ są takie, że $x_1 \leq x_2$. Wtedy dla każdego $y \in [0, 1]$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} I_C^{sp}(x_1, y) \geq I_C^{sp}(x_2, y) &\Leftrightarrow C(x_1, y) - x_1 + 1 \geq C(x_2, y) - x_2 + 1 \\ &\Leftrightarrow C(x_1, y) - C(x_1, 1) \geq C(x_2, y) - C(x_2, 1) \\ &\Leftrightarrow C(x_2, 1) - C(x_1, 1) - C(x_2, y) + C(x_1, y) \geq 0, \end{aligned}$$

co kończy dowód. □

Z powyższego dowodu wynika, że gdy funkcja C jest quasikopułą, to funkcja I_C^{sp} jest także implikacją rozmytą.

Przykład 4.9. Niech $C = M$, wtedy dla dowolnych $x, y \in [0, 1]$

$$I_C^{sp}(x, y) = \min(x, y) + 1 - x = \min(1, 1 - x + y) = I_{\mathbf{LK}}(x, y).$$

Przykład 4.10. Niech $C = \Pi$, wtedy dla dowolnych $x, y \in [0, 1]$

$$I_C^{sp}(x, y) = xy + 1 - x = I_{\mathbf{RC}}(x, y).$$

Przykład 4.11. Niech $C = W$, wtedy dla dowolnych $x, y \in [0, 1]$

$$I_C^{sp}(x, y) = \max(x + y - 1, 0) + 1 - x = \max(1 - x, y) = I_{\mathbf{KD}}(x, y).$$

Przekształcając równanie $I_C^{sp}(x, y) = 1 - x + C(x, y)$, gdzie C jest kopułą, otrzymujemy następującą definicje (patrz [39],[28]).

Definicja 4.12 ([39, Definition 7])**.** Niech I będzie implikacją rozmytą. Funkcję $C_I^{PSI}\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ określoną następująco

$$C_I^{PSI}(x,y) = I(x,y) + x - 1, \quad \text{dla wszystkich } x,y \in [0,1].$$

nazywamy probabilistyczną s-implikacyjną (w skrócie PSI) funkcją. Jeśli C_I^{PSI} jest kopułą, to mówimy, że C_I^{PSI} jest PSI kopułą.

PSI funkcja jest kopułą wtedy i tylko wtedy, gdy jest generowana z implikacji s-probabilistycznej. Istotnie, funkcja postaci $B(x,y) = I(x,y) + x - 1$ jest kopułą wtedy i tylko wtedy, gdy $I(x,y) = B(x,y) + 1 - x$ dla pewnej kopuły B, czyli gdy I jest implikacją s-probabilistyczną. Następujące twierdzenie pokazuje pod jakimi warunkami PSI funkcja jest kopułą i tym samym charakteryzuje implikacje s-probabilistyczne.

Twierdzenie 4.13 ([39, Theorem 1])**.** *Niech I będzie implikacją rozmytą, a C_I^{PSI} PSI funkcją. Wtedy C_I^{PSI} jest kopułą wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzą następujące warunki:*

(i) naturalna negacja I jest równa negacji klasycznej, $N_I = N_{\mathbf{C}}$.

(ii) I spełnia (NP)*.*

(iii) I jest 2-rosnąca czyli spełnia następujący warunek:
$I(x_2,y_2) - I(x_2,y_1) - I(x_1,y_2) + I(x_1,y_1) \geq 0$,
dla wszystkich takich $x_1,x_2,y_1,y_2 \in [0,1]$, że $x_1 \leq x_2, y_1 \leq y_2$.

Dowód. Zauważmy, że z definicji implikacji rozmytej dla dowolnych $x,y \in [0,1]$

$$C_I^{PSI}(0,y) = 0 \text{ i } C_I^{PSI}(x,1) = x.$$

Ponadto dla dowolnych $x,y \in [0,1]$ otrzymujemy

$$C_I^{PSI}(x,0) = 0 \Leftrightarrow I(x,0) + x - 1 = 0 \Leftrightarrow N_I(x) = 1 - x \Leftrightarrow N_I = N_{\mathbf{C}},$$

$$C_I^{PSI}(1,y) = y \Leftrightarrow I(1,y) + 1 - 1 = y \Leftrightarrow I(1,y) = y \Leftrightarrow I \text{ spełnia (NP)}.$$

Innymi słowy funkcja C_I^{PSI} spełnia warunki (**C1**)-(**C3**) wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzą warunki (i),(ii) z twierdzenia. Ponadto funkcja C_I^{PSI} spełnia warunek (**C4**) wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych takich $x_1,x_2,y_1,y_2 \in [0,1]$, że $x_1 \leq x_2, y_1 \leq y_2$ mamy

$$\begin{aligned}
&C_I^{PSI}(x_2,y_2) - C_I^{PSI}(x_2,y_1) - C_I^{PSI}(x_1,y_2) + C_I^{PSI}(x_1,y_1) \geq 0 \Leftrightarrow \\
&I(x_2,y_2) + x_2 - 1 - I(x_2,y_1) - x_2 + 1 - I(x_1,y_2) - x_1 + 1 + I(x_1,y_1) + x_1 - 1 \geq 0 \\
&\Leftrightarrow I(x_2,y_2) - I(x_2,y_1) - I(x_1,y_2) + I(x_1,y_1) \geq 0,
\end{aligned}$$

to jest równoważne z warunkiem (iii) i kończy dowód twierdzenia. □

4.3 Implikacje warunkowe

Zanim przystąpimy do definicji implikacji warunkowej udowodnimy ważne twierdzenie dotyczące kopuł.

Twierdzenie 4.14 ([49, Theorem 2.2.7]). *Niech C będzie kopułą. Dla każdego ustalonego $y \in [0,1]$, istnieje pochodna cząstkowa $\frac{\partial C(x,y)}{\partial x}$, dla prawie wszystkich $x \in [0,1]$, i dla takich x, y mamy*

$$0 \leq \frac{\partial C(x,y)}{\partial x} \leq 1. \tag{4.4}$$

Podobnie dla każdego $x \in [0,1]$, istnieje pochodna cząstkowa $\frac{\partial C(x,y)}{\partial y}$, dla prawie wszystkich $y \in [0,1]$, i dla takich x, y mamy

$$0 \leq \frac{\partial C(x,y)}{\partial y} \leq 1.$$

Ponadto funkcja $y \mapsto \frac{\partial C(x,y)}{\partial x}$ jest niemalejąca, dla prawie wszystkich $x \in [0,1]$ oraz funkcja $x \mapsto \frac{\partial C(x,y)}{\partial y}$ jest także niemalejąca, dla prawie wszystkich $y \in [0,1]$.

Dowód. Z definicji kopuła C spełnia warunek 1-Lipschitza ze względu na każdą zmienną, czyli jest ciągła bezwzględnie na każdą zmienną na mocy wniosku 1.4. Stąd, na mocy twierdzenia 1.5, dla każdego ustalonego $y \in [0,1]$, istnieje pochodna cząstkowa $\frac{\partial C(x,y)}{\partial x}$, dla prawie wszystkich $x \in [0,1]$ oraz dla każdego $x \in [0,1]$, istnieje pochodna cząstkowa $\frac{\partial C(x,y)}{\partial y}$, dla prawie wszystkich $y \in [0,1]$. Niech $y, x_1, x_2 \in [0,1]$ będą takie, że $x_2 > x_1$. Wtedy z warunków (**C4**) i (ND) wynika, że

$$0 \leq C(x_2,y) - C(x_1,y) \leq x_2 - x_1, \quad \text{stąd} \quad 0 \leq \frac{C(x_2,y) - C(x_1,y)}{x_2 - x_1} \leq 1,$$

co dowodzi (4.4). Analogicznie dowodzimy przypadek dla pochodnej względem drugiej zmiennej. Na mocy warunku (**C4**) funkcja $x \mapsto C(x,y_2) - C(x,y_1)$ jest niemalejąca, dla takich $x, y_1, y_2 \in [0,1]$, że $y_1 \leq y_2$. Stąd $\frac{\partial (C(x,y_2) - C(x,y_1))}{\partial x} \geq 0$, dla prawie wszystkich $x \in [0,1]$. Skąd $\frac{\partial C(x,y_2)}{\partial x} \geq \frac{\partial C(x,y_1)}{\partial x}$, podobnie rezultat otrzymujemy dla $x \mapsto \frac{\partial C(x,y)}{\partial y}$. □

Możemy już przystąpić do wprowadzenia implikacji warunkowej. Idea implikacji warunkowych jest bardzo podobna do idei implikacji probabilistycznych. Utożsamiamy prawdopodobieństwo warunkowe z implikacją z tą różnicą, że dla ciągłych zmiennych losowych X, Y, za zbiory A i B bierzemy odpowiednio $A = \{\omega \in \Omega \mid Y(\omega) \leq y\}$ i $B = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}$. Wówczas, gdy $P(B) > 0$, to

$$\begin{aligned}
P(Y \leq y \mid X = x) &= \frac{P(Y \leq y, X = x)}{P(X = x)} = \frac{P(Y \leq y, X \leq x) - P(Y \leq y, X < x)}{P(X \leq x) - P(X < x)} \\
&= \frac{P(Y \leq y, X \leq x) - \lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} P(Y \leq y, X \leq x - \varepsilon)}{P(X \leq x) - \lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} P(X \leq x - \varepsilon)} \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{P(Y \leq y, X \leq x - \varepsilon) - P(Y \leq y, X \leq x)}{P(X \leq x - \varepsilon) - P(X \leq x)} \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{H(x - \varepsilon, y) - H(x,y)}{F(x - \varepsilon) - F(x)} \\
&= \lim_{\Delta u \to 0^-} \frac{C(u + \Delta u, v) - C(u,v)}{\Delta u} = \frac{\partial}{\partial u} C(u,v),
\end{aligned}$$

gdzie $u = F(x)$, $v = G(y)$, H jest dystrybuantą pary zmiennych (X, Y), kopuła C jak taka jak w twierdzeniu 4.1 oraz pochodna $\frac{\partial C(u,v)}{\partial u}$ istnieje prawie wszędzie. Ponieważ pochodna $\frac{\partial C(u,v)}{\partial u}$ nie zawsze istnieje przedłużamy funkcję $\frac{\partial C(u,v)}{\partial u}$ na cały odcinek $[0, 1]$ następująco

$$\frac{\partial^*}{\partial u}C(u, v_0) = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial u}C(u, v_0), & u \in D_{v_0} \\ \inf\{\frac{\partial}{\partial u}C(u_1, v_0) : u_1 \in (0, u) \cap D_{v_0}\}, & u \notin D_{v_0} \end{cases},$$

gdzie $D_{v_0} = \{u \in [0, 1] \mid \frac{\partial C(u,v_0)}{\partial u} \text{ istnieje } \}$. Wtedy $\ell(D_{v_0}) = 1$, gdzie przez funkcję ℓ rozumiemy miarę Lebesgue'a dla zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a w zbiorze $[0, 1]$.

Definicja 4.15 ([12, Theorem 2.2.7])**.** Niech C będzie kopułą. Wtedy funkcję $I_C^{\partial} \colon [0, 1]^2 \to [0, 1]$ określoną następująco

$$I_C^{\partial}(u, v) = \begin{cases} 1, & u = 0, \\ \frac{\partial^*}{\partial u}C(u, v), & u > 0. \end{cases}$$

nazywamy **implikacją warunkową** opartą na kopule C. Zbiór wszystkich implikacji warunkowych oznaczamy przez $\mathbb{I}_{\mathbb{C}}^{cond}$.

Wniosek 4.16. *Niech $I \in \mathbb{I}_{\mathbb{C}}^{cond}$. Wtedy $\int_0^1 I(t, y)dt = y$ dla każdego $y \in [0, 1]$.*

Dowód. Ponieważ $I \in \mathbb{I}_{\mathbb{C}}^{cond}$, więc istnieje taka kopuła C, że $I_C^{\partial} = I$ i korzystając z ciągłości bezwzględnej kopuły C dostajemy

$$C(x, y) = \int_0^x \frac{\partial}{\partial t}C(t, y)dt = \int_0^1 I(t, y)dt,$$

dla każdych $x, y \in [0, 1]$. Stąd, gdy $x = 1$, to

$$y = C(1, y) = \int_0^1 I(t, y)dt,$$

co kończy dowód. □

Nie wszystkie implikacje warunkowe są implikacjami rozmytymi.

Lemat 4.17 ([12, Proposition 1])**.** *Niech C będzie kopułą, a funkcja I_C^{∂} implikacją warunkową opartą na C. Wtedy funkcja I_C^{∂} jest poprawnie określona oraz spełnia **(I2)** i **(I3)**. Jeśli ponadto funkcja $x \mapsto \frac{\partial}{\partial x}C(x, y_0)$ jest nierosnąca w zbiorze D_{y_0}, to funkcja I_C^{∂} jest implikacją rozmytą.*

Dowód. Na mocy nierówności (4.4) funkcja I_C^{∂} jest poprawnie określona. Z definicji wynika, że $I_C^{\partial}(0, 0) = I_C^{\partial}(0, 1) = 1$. Natomiast dla dowolnego $x < 1$

$$I_C^{\partial}(x, 1) = \lim_{h \to 0} \frac{C(x + h, 1) - C(x, 1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1,$$

co w przejściu $x \to 1^-$ dowodzi (**I3**). Niech $y_0, y_1 \in [0, 1]$ będą takie, że $y_0 < y_1$. Stąd, że $\ell((0, x_0] \cap D_{y_0} \cap D_{y_1}) = x_0$, wynika istnienie ciągu $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq D_{y_0} \cap D_{y_1}$ zbieżnego do x_0. Skąd na mocy twierdzenia 4.14

$$\frac{\partial}{\partial x}C(x_n, y_0) \le \frac{\partial}{\partial x}C(x_n, y_1),$$

co implikuje

$$\frac{\partial^*}{\partial x}C(x_0, y_0) \leq \frac{\partial^*}{\partial x}C(x_0, y_1),$$

więc funkcja I_C^∂ spełnia (**I2**). Stąd, że funkcja $\frac{\partial}{\partial x}C(x, y_0)$ jest nierosnąca w D_{y_0} i $\ell(D_{y_0}) = 1$, dla wszystkich $y_0 \in (0, 1)$, to funkcja $\frac{\partial^*}{\partial x}C(x, y_0)$ jest nierosnąca ze względu na pierwszą zmienną, czyli I_C^∂ spełnia (**I1**). $\square$

Przyporządkowanie kopule implikacji warunkowej zachodzi w sposób jednoznaczny.

Uwaga 4.18. Niech C_1, C_2 będą kopułami. Wówczas, gdy $I_{C_1}^\partial = I_{C_2}^\partial$, to $C_1 = C_2$.

Dowód. Niech $x, y \in [0, 1]$ i $x > 0$ oraz niech $D_y^1 = \{x \in [0, 1] \mid \frac{\partial C_1(x,y)}{\partial x}$ istnieje $\}$ i $D_y^2 = \{x \in [0, 1] \mid \frac{\partial C_2(x,y)}{\partial x}$ istnieje $\}$. Wtedy ponieważ $\ell(D_y^1 \cap D_y^2) = 1$, to z ciągłości bezwzględnej kopuł otrzymujemy

$$C_1(x, y) - C_2(x, y) = \int_0^x \frac{\partial C_1(t, y)}{\partial t} - \frac{\partial C_2(t, y)}{\partial t} dt = 0,$$

czyli $C_1(x, y) = C_2(x, y)$. Oczywiście $C_1(0, y) = C_2(0, y)$, stąd $C_1 = C_2$. $\square$

Oto standardowe przykłady implikacji warunkowych.

Przykład 4.19. Niech $C = M$, wtedy

$$I_C^\partial(x, y) = \begin{cases} 1, & x \leq y \\ 0, & y > x \end{cases} = I_{\mathbf{GR}}(x, y).$$

Przykład 4.20. Niech $C = \Pi$, wtedy

$$I_C^\partial(x, y) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ y, & x > 0 \end{cases} = I_{\mathbf{D}}(x, y).$$

Zauważmy, że $I_C^\partial = I_C^p$.

Przykład 4.21. Niech $C = W$, wtedy

$$I_C^\partial(x, y) = \begin{cases} 1, & x + y > 1 \text{ lub } x = 0 \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}.$$

Zauważmy, że funkcja I_C^∂ nie jest implikacją rozmytą. Istotnie, $0 = I_C^\partial(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) < I_C^\partial(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}) = 1$.

Następujące twierdzenia podają warunki na to aby implikacja warunkowa była implikacją rozmytą.

Twierdzenie 4.22 ([12, Theorem 2])**.** *Niech C będzie kopułą. Wtedy funkcja I_C^∂ jest implikacją rozmytą wtedy i tylko wtedy, gdy C jest wklęsła ze względu na pierwszą zmienną.*

Dowód.

$\Rightarrow$ Załóżmy, że funkcja I_C^{∂} jest implikacją rozmytą, i niech $x_0, x_1, y_0, \lambda \in [0,1]$ będą takie, że $x_0 < x_1$. Stąd, że funkcja $x \mapsto C(x, y_0)$ jest ciągła bezwzględnie wykorzystując twierdzenie 1.9 otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\lambda C(x_0,y_0)+(1-\lambda)C(x_1,y_0) &= \lambda \int_0^{x_0} \frac{\partial}{\partial x}C(x,y_0)dx + (1-\lambda)\int_0^{x_1} \frac{\partial}{\partial x}C(x,y_0)dx \\
&= \lambda \int_0^{x_0} \frac{\partial}{\partial x}C(x,y_0)dx + (1-\lambda)\int_0^{x_0} \frac{\partial}{\partial x}C(x,y_0)dx \\
&\quad + (1-\lambda)\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial}{\partial x}C(x,y_0)dx \\
&= \int_0^{x_0} \frac{\partial}{\partial x}C(x,y_0)dx + (1-\lambda)\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial}{\partial x}C(x,y_0)dx \\
&= \int_0^{x_0} \frac{\partial}{\partial x}C(x,y_0)dx + (1-\lambda)(x_1-x_0)\int_0^{1} \frac{\partial}{\partial x}C(x_0+(x_1-x_0)t,y_0)dt.
\end{aligned}$$

Z drugiej strony

$$\begin{aligned}
C(\lambda x_0+(1-\lambda)x_1,y_0) &= \int_0^{\lambda x_0+(1-\lambda)x_1} \frac{\partial}{\partial x}C(x,y_0)dx \\
&= \int_0^{x_0} \frac{\partial}{\partial x}C(x,y_0)dx + \int_{x_0}^{x_0+(1-\lambda)(x_1-x_0)} \frac{\partial}{\partial x}C(x,y_0)dx \\
&= \int_0^{x_0} \frac{\partial}{\partial x}C(x,y_0)dx \\
&\quad + (1-\lambda)(x_1-x_0)\int_0^{1} \frac{\partial}{\partial x}C(x_0+(1-\lambda)(x_1-x_0)t,y_0)dt.
\end{aligned}$$

Stąd, że $\frac{\partial}{\partial x}C(x_0+(x_1-x_0)t,y_0) \le \frac{\partial}{\partial x}C(x_0+(1-\lambda)(x_1-x_0)t,y_0)$ mamy

$$\int_0^{1} \frac{\partial}{\partial x}C(x_0+(x_1-x_0)t,y_0)dt \le \int_0^{1} \frac{\partial}{\partial x}C(x_0+(1-\lambda)(x_1-x_0)t,y_0)dt.$$

Stąd

$$\lambda C(x_0,y_0)+(1-\lambda)C(x_1,y_0) \le C(\lambda x_0+(1-\lambda)x_1,y_0),$$

czyli C jest wklęsła ze względu na pierwszą zmienną.

$\Leftarrow$ Z drugiej strony jeśli C jest wklęsła ze względu na pierwszą zmienną, to funkcja $\frac{\partial}{\partial x}C(x_0,y_0)$ jest nierosnąca ze względu na pierwszą zmienną dla prawie wszystkich $x_0 \in [0,1]$. Stąd na mocy lematu 4.17 otrzymujemy, że funkcja I_C^{∂} jest implikacją rozmytą. $\square$

Przykład 4.23 ([12, Example 3])**.** Niech C_θ dla $\theta \in [-1,1]$ będzie kopułą należącą do rodziny FGM(θ) (patrz przykład 1.53). Wtedy C_θ jest wklęsła tylko dla $\theta \in [0,1]$. Stąd funkcja

$$I_{C_\theta}^{\partial}(x,y) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ y[1+\theta x(1-2x)(1-y)], & x > 0, \end{cases}$$

jest implikacją rozmytą wtedy i tylko wtedy, gdy $\theta \in [0,1]$.

Przykład 4.24 ([12, Example 3]). Niech $C_{\alpha,\beta}$ dla $\alpha, \beta \in [0,1]$ będzie kopułą należącą do rodziny Cuadras-Augé'a (patrz przykład 1.53). Wtedy kopuła $C_{\alpha,\beta}$ jest wklęsła ze względu na pierwszą zmienną, dla wszystkich $\alpha, \beta \in [0,1]$, czyli $I^{\partial}_{C_{\alpha,\beta}}$ jest implikacją rozmytą, dla wszystkich $\alpha, \beta \in [0,1]$.

Twierdzenie 4.25 ([12, Proposition 6]). *Niech C_ϕ będzie kopułą archimedesową z generatorem ścisłym dwukrotnie różniczkowalnym. Wtedy funkcja $I^{\partial}_{C_\phi}$ jest implikacją rozmytą wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja $\frac{1}{\phi'(t)}$ jest wklęsła dla każdego $t \in (0,1)$.*

Dowód. Kopuła C_ϕ jest wklęsła ze względu na pierwszą zmienną wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja $g\colon [0,1] \to [0,1]$ określona wzorem:

$$g(t) = \phi^{-1}(\phi(t) + a), \qquad t \in (0,1),$$

gdzie $a = \phi(v)$, jest wklęsła co jest równoważne z

$$g''(t) = \frac{\phi''(t)(\phi'(\phi^{-1}(\phi(t)+a)))^2 - (\phi'(t))^2\phi''(\phi^{-1}(\phi(t)+a))}{(\phi'(\phi^{-1}(\phi(t)+a)))^3} \leq 0, \tag{4.5}$$

dla wszystkich $t \in (0,1)$. Ponieważ ϕ jest generatorem kopuły, stąd $\phi'(t) < 0$ i $\phi''(t) > 0$, dla każdych $t \in (0,1)$. Wtedy nierówność (4.5) można przekształcić do

$$\frac{\phi''(t)}{(\phi'(t))^2} \geq \frac{\phi''(\phi^{-1}(\phi(t)+a))}{(\phi'(\phi^{-1}(\phi(t)+a)))^2}. \tag{4.6}$$

Niech $s = \phi^{-1}(\phi(t) + a) \leq t$. Wówczas nierówność (4.6) przekształca się do

$$\left(\frac{1}{\phi'(t)}\right)' \leq \left(\frac{1}{\phi'(s)}\right)',$$

dla wszystkich takich $s, t \in (0,1)$, że $s \leq t$. To jest równoważne z wklęsłością funkcji $\frac{1}{\phi'}$. □

Przykład 4.26 ([12, Example 5]). Rozważmy rodzinę kopuł C_α *Claytona* (patrz przykład 1.53) z generatorami postaci $\varphi_\alpha(x) = \frac{x^{-\alpha}-1}{\alpha}$, gdzie $\alpha \in [-1,\infty) \setminus \{0\}$. Ponieważ $(\frac{1}{\varphi'_\alpha(x)})'' = -\alpha(\alpha+1)x^{\alpha-1} < 0$, tylko dla $\alpha > 0$ wtedy z twierdzenia 4.25 dostajemy, że $I^{\partial}_{C_\alpha}$ jest implikacją rozmytą, tylko dla $\alpha > 0$.

Przykład 4.27 ([12, Example 6]). Rozważmy rodzinę t-norm ścisłych Franka $T^{\mathbf{F}}_\lambda$, dla $\lambda \in (0,\infty) \setminus \{1\}$ (gdy $\lambda = 1$, to $T^{\mathbf{F}}_1 = T_{\mathbf{P}}$, a gdy $\lambda = 0$, to $T^{\mathbf{F}}_1 = T_{\mathbf{M}}$) które jak wiemy są kopułami. Posiadają one generatory postaci $f_\lambda(x) = -\ln\left(\frac{\lambda^x - 1}{\lambda - 1}\right)$ dla $x \in (0,1)$. Ponieważ $(\frac{1}{f'_\lambda(x)})'' = \frac{\ln\lambda}{\lambda^x} < 0$, dla $\lambda \in (0,1)$ to na mocy twierdzenia 4.25, implikacja $I^{\partial}_{T^{\mathbf{F}}_\lambda}$ jest implikacją rozmytą wtedy i tylko wtedy, gdy $\lambda \in [0,1]$.

4.4 Implikacje dualne i s-dualne

W wielu zastosowaniach rachunku prawdopodobieństwa ważną rolę odgrywają tak zwane funkcje dualne $\overline{F}(x) = P(X > x)$. Oczywiście $\overline{F}(x) = 1 - F(x)$. Niech H będzie wspólną dystrybuantą dla pary (X,Y) zmiennych losowych, rozważmy funkcję $\overline{H}(x,y) = P(X > x, Y > y)$ którą nazywamy dualną wspólną dystrybuantą. Niech kopuła C będzie taka jak w twierdzeniu Sklara. Wtedy

$$\begin{aligned} \overline{H}(x,y) &= 1 - P(X \leq x \text{ lub } Y \leq y) \\ &= 1 - F(x) - G(y) + H(x,y) \\ &= \overline{F}(x) + \overline{G}(y) - 1 + C(F(x), G(y)) \\ &= \overline{F}(x) + \overline{G}(y) - 1 + C(1 - \overline{F}(x), 1 - \overline{G}(y)) \\ &= C^*(\overline{F}(x), \overline{G}(y)), \end{aligned} \tag{4.7}$$

gdzie C^* jest kopułą dualną do kopuły C.
Rozważmy prawdopodobieństwo warunkowe dla następujących zdarzeń

$$A = \{\omega \in \Omega : X(\omega) > x\} \text{ i } B = \{\omega \in \Omega : Y(\omega) > y\}.$$

Zakładając, że $P(X > x) > 0$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} P(Y > y \mid X > x) &= \frac{P(Y > y, X > x)}{P(X > x)} = \frac{\overline{H}(x,y)}{\overline{F}(x)} = \frac{C^*(\overline{F}(x), \overline{G}(y))}{\overline{F}(x)} \\ &= \frac{C^*(u,v)}{u} = \frac{u + v - 1 + C(1-u, 1-v)}{u}, \end{aligned}$$

gdzie $u = \overline{F}(x), v = \overline{G}(y)$. Utożsamiając prawdopodobieństwo warunkowe z implikacją otrzymujemy implikację dualną

$$I_C^d(u,v) = \begin{cases} 1, & u = 0, \\ \frac{u+v-1+C(1-u,1-v)}{u}, & u > 0. \end{cases}$$

dla danej kopuły C.
Podobnie jak implikacje dualne definiowaliśmy w sposób analogiczny do implikacji probabilistycznych, implikacje s-dualne definiujemy w sposób analogiczny do implikacji s-probabilistycznych. Mianowice niech $\overline{H}(x,y) = P(X > x, Y > y)$ będzie dualną wspólną dystrybuantą pary (X,Y) zmiennych losowych. Ze wzoru (4.3) wiemy, że dla każdej przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i dwóch zdarzeń $A, B \in \mathcal{F}$ mamy

$$P(A' \cup B) = P(A \cap B) - P(A) + 1.$$

Niech $A = \{\omega \in \Omega : X(\omega) > x\}$ i $B = \{\omega \in \Omega : Y(\omega) > y\}$. Wykorzystując wzór (4.7) otrzymujemy

$$\begin{aligned} P(X \leq x \text{ lub } Y > y) &= P(Y > y, X > x) - P(X > x) + 1 = \overline{H}(x,y) - \overline{F}(x) + 1 \\ &= C^*(\overline{F}(x), \overline{G}(y)) - \overline{F}(x) + 1 = C^*(u,v) - u + 1, \end{aligned}$$

gdzie $u = \overline{F}(x), v = \overline{G}(y)$. Postępując analogicznie jak w przypadku implikacji s-probabilistycznych otrzymujemy implikację s-dualną

$$I_C^{sd}(u,v) = C^*(u,v) - u + 1 = C(1-u, 1-v) + v, \qquad u, v \in [0,1].$$

4.5 Zależność zmiennych losowych

Na początku tego rozdziału zdefiniowaliśmy klika rodzajów funkcji przy pomocy twierdzenia Sklara. Część z tych funkcji otrzymaliśmy już wcześniej w rozdziale trzecim przy pomocy wzoru (3.2). Stąd, że te funkcje są wygenerowane z kopuł, które są pomocne w opisie struktury zależności pomiędzy zmiennymi losowymi, wydaje się, że probabilistyczny kontekst może dać głębszy wgląd w naturę tych funkcji. Zacznijmy od wprowadzenia kilku podstawowych definicji zależności (patrz [8]).

Definicja 4.28. Niech X i Y będą zmiennymi losowymi. Wtedy

- X i Y są **dodatnio zależne**, gdy
$$P(X \leq x, Y \leq y) \geq P(X \leq x)P(Y \leq y), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2. \tag{PQD}$$
- Y jest **malejącym lewym ogonem** w X, gdy
$$P(Y \leq y \mid X \leq x) \quad \text{jest nierosnącą funkcją } x \text{ dla } y \in \mathbb{R}. \tag{LTD(Y|X)}$$
- Y jest **rosnącym prawym ogonem** w X, gdy
$$P(Y > y \mid X > x) \quad \text{jest niemalejącą funkcją } x \text{ dla } y \in \mathbb{R}. \tag{RTI(Y|X)}$$
- Y jest **stochastycznie rosnąca** w X, gdy
$$P(Y > y \mid X = x) \quad \text{jest niemalejącą funkcją } x \text{ dla } y \in \mathbb{R}. \tag{SI(Y|X)}$$
- X i Y z wspólną dystrybuantą H są **całkowicie dodatnie rzędu 2**, gdy dla wszystkich takich $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \overline{\mathbb{R}}$, że $x_1 \leq x_2$ i $y_1 \leq y_2$ zachodzi warunek
$$H(x_1, y_1)H(x_2, y_2) \geq H(x_2, y_1)H(x_1, y_2). \tag{TP2}$$

Powyższe definicje są powiązane następującą zależnością

$$\begin{aligned} &(\mathrm{TP2}) \Longrightarrow (\mathrm{SI(Y|X)}) \Longrightarrow (\mathrm{LTD(Y|X)}) \Longrightarrow (\mathrm{PQD}) \\ &(\mathrm{TP2}) \Longrightarrow (\mathrm{SI(Y|X)}) \Longrightarrow (\mathrm{RTI(Y|X)}) \Longrightarrow (\mathrm{PQD}). \end{aligned} \tag{4.8}$$

Twierdzenie 4.29 ([49, Theorem 5.2.5, Theorem 5.2.10]). *Niech X i Y będą ciągłymi zmiennymi losowymi z kopułą C. Wówczas*

1. (LTD(Y|X)) *wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $y \in [0,1]$, funkcja $\frac{C(x,y)}{x}$ jest nierosnąca względem x.*
2. (RTI(Y|X)) *wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $y \in [0,1]$, funkcja $\frac{y-C(x,y)}{1-x}$ jest nierosnąca względem x.*
3. (SI(Y|X)) *wtedy i tylko wtedy, gdy kopuła C jest wklęsła ze względu na pierwszą zmienną.*

Wniosek 4.30 ([49, Corollary 5.2.6]). *Niech X i Y będą ciągłymi zmiennymi losowymi z kopułą C. Wówczas*

1. (LTD(Y|X)) *wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego* $y \in [0,1]$, $\frac{\partial C(x,y)}{\partial x} \leq \frac{C(x,y)}{x}$, *dla prawie wszystkich* x.

2. (RTI(Y|X)) *wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego* $y \in [0,1]$, $\frac{\partial C(x,y)}{\partial x} \leq \frac{y-C(x,y)}{1-x}$, *dla prawie wszystkich* x.

Definicja 4.31 ([27, Defintion 13])**.** Niech X i Y będą ciągłymi zmiennymi losowymi z kopułą C. Wówczas

- implikacje probabilistyczną I_C^p oparta na kopule C będziemy nazywać implikacją probabilistyczną generowaną z pary zmiennych losowych (X, Y);
- Implikacje warunkową I_C^∂ oparta na kopule C będziemy nazywać implikacją warunkową generowaną z pary zmiennych losowych (X, Y);
- Implikacje dualną I_C^d oparta na kopule C będziemy nazywać implikacją dualną generowaną z pary zmiennych losowych (X, Y);

Wniosek 4.32 ([12, str. 58])**.** *Implikacja warunkowa* I_C^∂ *jest implikacją rozmytą wtedy i tylko wtedy, gdy jest generowana z* (X, Y)*, gdzie* Y *jest stochastycznie rosnąca w* X*.*

Dowód. Wystarczy zastosować twierdzenia 4.29, 4.22. □

Wniosek 4.33 ([27, Theorem 14])**.** *Implikacja probabilistyczna* I_C^p *jest implikacją rozmytą wtedy i tylko wtedy, gdy jest generowana z* (X, Y)*, gdzie* Y *jest malejącym lewym ogonem w* X*.*

Dowód. Implikacja probabilistyczna I_C^p jest implikacją rozmytą wtedy i tylko wtedy, gdy jest nierosnąca ze względu na pierwszą zmienną. Z twierdzenia 4.29 wiemy, że Y jest malejącym lewym ogonem w X wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja $\frac{C(x,y)}{x}$ jest nierosnąca ze względu na zmienną x, dla dowolnych y. Łącząc te dwa fakty otrzymujemy tezę twierdzenia. □

Wniosek 4.34 ([26, Theorem 3])**.** *Implikacja dualna* I_C^d *jest implikacją rozmytą wtedy i tylko wtedy, gdy jest generowana z* (X, Y)*, gdzie* Y *jest rosnącym prawym ogonem w* X*.*

Dowód. Implikacja dualna I_C^d jest implikacją rozmytą wtedy i tylko wtedy, gdy jest nierosnąca ze względu na pierwszą zmienną. Aczkolwiek jeśli

$$I_C^d(x,y) = \frac{x+y-1+C(1-x,1-y)}{x} = 1 + \frac{y-1+C(1-x,1-y)}{x}$$

jest nierosnąca względem x, to $\frac{y-1+C(1-x,1-y)}{x}$ jest także nierosnąca względem x, dla wszystkich $y \in [0,1]$. Zamieniając x z $1-x$ oraz y z $1-y$ dostajemy, że funkcja $\frac{-y+C(x,y)}{1-x}$ jest niemalejąca względem x. Stąd funkcja $\frac{y-C(x,y)}{1-x}$ jest nierosnąca względem x dla $y \in [0,1]$. Innymi słowy implikacja dualna I_C^d jest implikacją rozmytą wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{y-C(x,y)}{1-x}$ jest nierosnąca względem x dla $y \in [0,1]$. Z twierdzenia 4.29 wiemy, że Y jest (RTI(Y|X)) wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja $\frac{y-C(x,y)}{1-x}$ jest nierosnąca względem x, dla $y \in [0,1]$. Łącząc te dwa fakty otrzymujemy tezę twierdzenia. □

Wniosek 4.35 ([12, Proposition 3]). *Niech C będzie kopułą, a I_C^{∂} i I_C^{p} odpowiednio implikacją warunkową i implikacją probabilistyczną opartą na C. Wtedy jeśli I_C^{∂} jest implikacją rozmytą, to I_C^{p} jest implikacją rozmytą. Ponadto w tym przypadku $I_C^{\partial}(x,y) \leq I_C^{p}(x,y)$, dla wszystkich $x, y \in [0,1]$.*

Dowód. Pierwsza cześć wynika z (4.8). Druga cześć wynika z wniosku (4.30). □

Zauważmy, że przeciwna implikacja nie zachodzi.

Przykład 4.36 ([49, Exercise 5.32]). Niech C będzie kopułą określoną następująco

$$C(x,y) = \begin{cases} \frac{3xy}{2} - \frac{x+y-1}{2} & \frac{1}{3} \leq y \leq 1-x \leq \frac{2}{3}, \\ \frac{3xy}{2} & \frac{1}{3} \leq 1-x \leq y \leq \frac{2}{3}, \\ \min(x,y) & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Dla kopuły C zachodzi (LTD(Y|X)) ale nie zachodzi (SI(Y|X)).

Wniosek 4.37 ([27, Lemma 15],[26, Theorem 5]). *Jeśli zmienne losowe X i Y spełniają* (TP2)*, to wtedy implikacje probabilistyczne, implikacje dualne i implikacje warunkowe generowane z X i Y są implikacjami rozmytymi.*

4.6 Implikacje QL-probabilistyczne

Oczywiście implikacje probabilistyczne, s-probabilistyczne, warunkowe, dualne oraz s-dualne nie są to jedyne funkcje które można otrzymać przy pomocy twierdzenia Sklara. Innymi znanymi funkcjami otrzymanymi z twierdzenia Sklara są implikacje QL-probabilistyczne. Idea konstrukcji tych funkcji opiera się na zależności

$$p \to q \equiv \neg p \vee (p \wedge q).$$

Nazwa implikacji QL-probabilistycznych bierze się z analogii z QL-implikacjami. Utożsamiając implikację $A \to B$ jako prawdopodobieństwo, że zdarzenie A nie zachodzi lub zachodzą zdarzenia B i A, czyli $P(A' \cup (A \cap B))$. Wtedy dla każdej przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i dwóch zdarzeń $A, B \in \mathcal{F}$, mamy

$$\begin{aligned} P(A' \cup (A \cap B)) &= P(A') + P(A \cap B) \\ &= 1 - P(A) + P(A \cap B), \end{aligned}$$

ponieważ $A' \cap (A \cap B) = \emptyset$. Stąd,

$$P(A' \cup (A \cap B)) = 1 - P(A) + P(A \cap B),$$

co jest równoważne z implikacjami s-probabilistycznymi.

Wniosek 4.38 ([27, Proposition 24]). *Implikacje QL-probabilistyczne są równoważne z implikacjami s-probabilistycznymi.*

Rozdział 5

Własności implikacji otrzymanych z twierdzenia Sklara

W tym rozdziale przyjrzymy się różnym własnościom implikacji otrzymanych z twierdzenia Skalara i omówionych w poprzednim rozdziale oraz określimy przecięcia tych klas funkcji z najbardziej znanymi klasami implikacji rozmytych. Wyniki z tej części bazują na pracy [3], gdzie jednym z współautorów jest Autor obecnej dysertacji oraz na nieopublikowanych wynikach Autora.

5.1 Podstawowe własności

Następujące lematy pokazują jakiej postaci są negacje klasyczne dla implikacji probabilistycznych, s-probabilistycznych i warunkowych.

Lemat 5.1 ([3, Lemma 3.3]). *Niech I_C^p będzie implikacją probabilistyczną opartą na kopule C. Naturalna negacja $N_{I_C^p}$ jest najmniejszą negacją rozmytą, czyli dla dowolnego $x \in [0,1]$ mamy*

$$N_{I_C^p}(x) = N_{\mathbf{D1}}(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & x > 0. \end{cases}$$

Dowód. Dla dowolnej implikacji probabilistycznej I_C^p i dowolnego $x \in [0,1]$ otrzymujemy

$$N_{I_C^p}(x) = I_C^p(x,0) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ \frac{C(x,0)}{x}, & x > 0 \end{cases} = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & x > 0. \end{cases}$$

□

Lemat 5.2 ([3, Lemma 3.6]). *Niech I_C^{sp} będzie implikacją s-probabilistyczna opartą na kopule C. Wtedy naturalna negacja $N_{I_C^{sp}}$ jest negacją klasyczną, czyli*

$$N_{I_C^{sp}}(x) = N_{\mathbf{C}}(x) = 1 - x, \qquad x, y \in [0,1].$$

Dowód. Dla dowolnej implikacji s-probabilistycznej I_C^{sp} i dowolnego $x \in [0,1]$ mamy

$$N_{I_C^{sp}}(x) = I_C^{sp}(x,0) = C(x,0) - x + 1 = 1 - x = N_{\mathbf{C}}(x).$$

□

Lemat 5.3. *Niech I_C^{∂} będzie implikacją warunkową opartą na kopule C. Naturalna negacja $N_{I_C^{\partial}}$ oparta na I_C^{∂} jest najmniejszą negacją rozmytą, czyli dla dowolnego $x \in [0,1]$, mamy*

$$N_{I_C^{\partial}}(x) = N_{\mathbf{D1}}(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & x > 0. \end{cases}$$

Dowód. Dla dowolnej kopuły C i dowolnego $x \in (0,1)$ otrzymujemy

$$\frac{\partial C(x,0)}{\partial x} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{C(x+\varepsilon,0) - C(x,0)}{\varepsilon} = 0,$$

więc

$$N_{I_C^{\partial}}(x) = I_C^{\partial}(x,0) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ \frac{\partial^* C(x,0)}{\partial x}, & x > 0 \end{cases} = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & x > 0. \end{cases}.$$

□

Podamy teraz związek pomiędzy rodziną implikacji s-probabilistycznych oraz rodzinami implikacji probabilistycznych i implikacji warunkowych.

Twierdzenie 5.4 ([3, Proposition 2.13])**.** *Rodzina wszystkich implikacji probabilistycznych jest rozłączna z rodziną wszystkich implikacji s-probabilistycznych, czyli*

$$\mathbb{I}_{\mathbb{C}}^{prob} \cap \mathbb{I}_{\mathbb{C}}^{sprob} = \emptyset.$$

Dowód. Przypuśćmy, że istnieją takie dwie kopuły C_1 i C_2, że

$$\mathbb{I}_{\mathbb{C}}^{prob} \ni I_{C_1}^{p} = I_{C_2}^{sp} \in \mathbb{I}_{\mathbb{C}}^{sprob}.$$

Stąd otrzymujemy

$$\frac{C_1(x,y)}{x} = C_2(x,y) - x + 1,$$

dla wszystkich takich $x, y \in [0,1]$, że $x \neq 0$. Wstawiając $y = 0$ w powyższym równaniu otrzymujemy, że $\frac{0}{x} = 0 - x + 1$, wiec $0 = 1 - x$ co nie jest prawdą, dla $x \in (0,1)$. To przeczy założeniu i kończy dowód twierdzenia. □

Twierdzenie 5.5. *Rodzina wszystkich implikacji warunkowych jest rozłączna z rodziną wszystkich implikacji s-probabilistycznych, czyli*

$$\mathbb{I}_{\mathbb{C}}^{cond} \cap \mathbb{I}_{\mathbb{C}}^{sprob} = \emptyset.$$

Dowód. Z lematu 5.3 wynika, że negacja klasyczna implikacji warunkowej jest równa $N_{\mathbf{D1}}$, a negacja klasyczna implikacji warunkowej jest równa $N_{\mathbf{C}}$. Stąd zachodzi teza.

□

Klasy implikacji probabilistycznych i warunkowych mają niepusty przekrój.

Twierdzenie 5.6 ([12, Proposition 4])**.** *Niech C będzie kopułą. Wówczas $I_C^{p} = I_C^{\partial}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $C = \Pi$. Ponadto, w klasie kopuł $\mathcal{C}_\Pi$ postaci $\mathcal{C}_\Pi = \{C \in \mathcal{C} \mid C \leq \Pi$ lub $C \geq \Pi\}$ zachodzi*

$$\mathbb{I}_{\mathcal{C}_\Pi}^{prob} \cap \mathbb{I}_{\mathbb{C}}^{cond} = \{I_{\mathbf{D}}\}.$$

Dowód. Załóżmy, że $I_C^p = I_C^\partial$, czyli

$$\frac{\partial^*}{\partial x} C(x,y) = \frac{C(x,y)}{x}, \qquad x \in (0,1], \ y \in [0,1]. \tag{5.1}$$

Ustalmy $y \in [0,1]$, ponieważ prawa strona powyższego równania jest funkcją ciągłą zmiennej $x \in (0,1]$, stąd funkcja $x \mapsto \frac{\partial^*}{\partial x} C(x,y)$ jest ciągła dla $x \in (0,1]$. Z ciągłości bezwzględnej kopuły C na mocy twierdzenia 1.5 otrzymujemy

$$C(x,y) = \int_0^x \frac{\partial^*}{\partial x} C(t,y) dt. \tag{5.2}$$

Ponieważ prawa strona równania (5.2) jest funkcją o ciągłej pochodniej, więc pochodna cząstkowa $\frac{\partial}{\partial x} C(x,y)$ istnieje dla wszystkich $x \in (0,1)$ i jest funkcją ciągłą. Stąd równanie (5.1) przyjmuje postać

$$\frac{\partial}{\partial x} C(x,y) = \frac{C(x,y)}{x}, \qquad x \in (0,1), y \in [0,1].$$

Rozwiązanie powyższego równania jest postaci $C(x,y) = f(y)x$, gdzie f jest funkcją ciągłą w $(0,1)$. Stąd, że $y = C(1,y) = \lim_{x \to 1^-} x f(y) = f(y)$, dostajemy $C = \Pi$.

Załóżmy, że $C_1 \in \mathcal{C}$, $C_2 \in \mathcal{C}_\Pi$ oraz $I_{C_1}^\partial = I_{C_2}^p$. Wtedy dla dowolnego $y \in [0,1]$

$$y = C_1(1,y) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} C_1(t,y) dt = \int_0^1 \frac{C_2(t,y)}{t} dt,$$

co oznacza, że $\int_0^1 \left(\frac{C_2(t,y)}{t} - y \right) dt = 0$. Stąd $C_2(t,y) = ty$, dla prawie wszystkich $t \in [0,1]$, ponieważ $C_2 \in \mathcal{C}_\Pi$. Z ciągłości C_2 wynika, że $C_2(x,y) = \Pi$. Stąd $C_1 = \Pi$ oraz $I_\Pi^p = I_\Pi^\partial = I_{\mathbf{D}}$. □

Zbadamy teraz spełnianie takich warunków jak (NP), (IP), (OP), dla już badanych przez nas rodzin implikacji opartych na kopułach. Implikacje probabilistyczne i s-probabilistyczne spełniają zawsze (NP). W przypadku implikacji warunkowych bywa z tym różnie np. I_Π^∂ spełnia (NP), a I_M^∂ nie spełnia (NP).

Lemat 5.7 (por. [27, Lemma 9, Lemma 21])**.** *Niech C będzie kopułą. Wtedy funkcje I_C^p, I_C^{sp} spełniają* (NP).

Dowód. Ponieważ $I_C^p = J_{I_{\mathbf{GG}},C}$ i $I_C^{sp} = J_{I_{\mathbf{LK}},C}$, gdzie J jest funkcją postaci (3.2) oraz implikacje $I_{\mathbf{GG}}$, $I_{\mathbf{LK}}$ spełniają (NP) teza zachodzi na mocy lematu 3.34. □

Następujące wyniki pokazują kiedy implikacje s-probabilistyczne, probabilistyczne i warunkowe spełniają (bądź nie spełniają warunków) (OP) i (IP).

Lemat 5.8 ([3, Lemma 5.2])**.** *Jeśli kopuła C jest idempotentna, to $C = M$.*

Dowód. Z ograniczeń Frécheta-Hoeffdinga $C(x,y) \le \min(x,y)$, dla wszystkich $x, y \in [0,1]$. Przypuśćmy, że $C(x_0,y_0) < \min(x_0,y_0)$, dla pewnych takich $x_0, y_0 \in (0,1)$, że $x_0 < y_0$. Korzystając z warunku (**C4**) otrzymujemy

$$x_0 > C(x_0,y_0) \ge C(x_0,x_0) = x_0,$$

to prowadzi do sprzeczności z założeniem. W przypadku kiedy $y_0 < x_0$, to dowód jest analogiczny. □

Lemat 5.9 ([27, Lemma 10]). *Jedyną implikacją probabilistyczną, która spełnia warunek* (IP) *jest implikacja Goguena,* $I_{\mathbf{GG}}$.

Dowód. Niech I_C^p będzie implikacją probabilistyczną opartą na kopule C. Jeśli

$$I_C^p(x,x) = 1, \qquad \text{dla każdego } x \in [0,1],$$

to kopuła C jest idempotentna. Z lematu 5.8 otrzymujemy, że $C = M$. Ponieważ $I_M^p = I_{\mathbf{GG}}$, więc to dowodzi tezy twierdzenia. □

Wniosek 5.10 ([27, Lemma 11]). *Jedyną implikacją probabilistyczną, która spełnia warunek* (OP) *jest implikacja Goguena,* $I_{\mathbf{GG}}$.

Dowód. Jeśli $I_C^p = I_{\mathbf{GG}}$, to warunek (OP) dla tej implikacji oczywiście zachodzi. Ponieważ warunek (OP) implikuje warunek (IP), wtedy z lematu 5.9 otrzymujemy tezę. □

Lemat 5.11 ([27, Lemma 22]). *Jedyną implikacją s-probabilistyczną, która spełnia warunek* (IP) *jest implikacja Łukasiewicza,* $I_{\mathbf{LK}}$.

Dowód. Z definicji implikacji s-probabilistycznej mamy

$$I_C^{sp}(x,x) = 1 \Longleftrightarrow C(x,x) - x + 1 = 1 \Longleftrightarrow C(x,x) = x.$$

Stąd otrzymujemy, że $C(x,x) = x$ dla wszystkich $x \in [0,1]$, czyli C jest idempotentna. Korzystając z lematu 5.8, wiemy, że kopuła musi być wtedy równa M, ale $I_M^{sp} = I_{\mathbf{LK}}$, co dowodzi tezy. □

Wniosek 5.12 ([27, Lemma 23]). *Jedyną implikacją s-probabilistyczną, która spełnia warunek* (OP) *jest implikacja Łukasiewicza,* $I_{\mathbf{LK}}$.

Dowód. Jeśli $I_C^{sp} = I_{\mathbf{LK}}$, to warunek (OP) dla tej implikacji oczywiście zachodzi. Ponieważ warunek (OP) implikuje warunek (IP), wtedy z lematu 5.11 otrzymujemy tezę. □

Lemat 5.13. *Jedyną implikacją warunkową, która spełnia warunek* (IP) *jest implikacja Geines Reschera,* $I_{\mathbf{GR}}$.

Dowód. Niech I_C^∂ będzie implikacją warunkową spełniającą (IP) opartą na kopule C. Wtedy z ciągłości bezwzględnej C otrzymujemy, że dla $x \in (0,1]$

$$C(x,x) = \int_0^x \frac{\partial C(t,t)}{\partial t} dt = \int_0^x 1 dt = x,$$

czyli kopuła C jest idempotentna. Z lematu 5.8 otrzymujemy, że $C = M$. Wiemy, że $I_M^\partial = I_{\mathbf{GR}}$, co dowodzi naszej tezy. □

Wniosek 5.14. *Jedyną implikacją warunkową, która spełnia warunek* (OP) *jest implikacja Geines Reschera,* $I_{\mathbf{GR}}$.

Dowód. Jeśli $I_C^\partial = I_{\mathbf{GR}}$, to warunek (OP) dla tej implikacji oczywiście zachodzi. Ponieważ warunek (OP) implikuje warunek (IP), wtedy z lematu 5.13 otrzymujemy tezę. □

5.2 Prawo kontrapozycji

Jedną z najważniejszych tautologii w logice klasycznej jest prawo kontrapozycji:

$$p \to q \equiv \neg q \to \neg p.$$

Ponieważ negacja w logice klasycznej spełnia prawo podwójnego przeczenia

$$\neg(\neg p) \equiv p,$$

więc następujące formuły są także tautologiami w logice klasycznej:

$$\neg p \to q \equiv \neg q \to p,$$
$$p \to \neg q \equiv q \to \neg p.$$

Uogólnienie tych tautologii klasycznych w logice rozmytej odgrywa ważną rolę w zastosowaniach opartych na implikacjach rozmytych i negacjach rozmytych (systemy dedukcyjne, systemy eksperckie itp.).

Definicja 5.15 ([6, Definition 1.5.1]). Niech I oznacza implikacje rozmytą, a N negację rozmytą. Powiemy, że I spełnia

(i) ***prawo kontrapozycji*** (ang. *law of contraposition*) ze względu na negację rozmytą N, jeśli

$$I(x, y) = I(N(y), N(x)), \qquad x, y \in [0, 1]; \tag{CP}$$

(ii) ***prawo lewej kontrapozycji*** (ang. *law of left contraposition*) ze względu na negację rozmytą N, jeśli

$$I(N(x), y) = I(N(y), x), \qquad x, y \in [0, 1]; \tag{L-CP}$$

(iii) ***prawo prawej kontrapozycji*** (ang. *law of right contraposition*) ze względu na negację rozmytą N, jeśli

$$I(x, N(y)) = I(y, N(x)), \qquad x, y \in [0, 1]. \tag{R-CP}$$

Zanim przejdziemy do zbadania praw kontrapozycji dla implikacji otrzymanych z twierdzenia Sklara przytoczymy dwa lematy.

Lemat 5.16 ([6, Corollary 1.5.5],[6, Corollary 1.5.15]). *Niech $I\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ będzie funkcją spełniającą* (NP). *Jeśli N_I nie jest negacją silną, to nie istnieje taka negacja rozmyta, że I spełnia z nią* (CP). *Ponadto, jeśli N_I nie jest negacją ciągłą, to nie istnieje taka negacja rozmyta, że I spełnia z nią* (L-CP).

Lemat 5.17 ([6, Corollary 1.5.21]). *Niech $I\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ będzie funkcją spełniającą* (NP) *i* (R-CP) *ze względu na negacje rozmytą N. Wtedy I spełnia* ***(I3)*** *oraz $N_I = N$.*

Twierdzenie 5.18 ([3, Theorem 3.4]). *Nie istnieje implikacja probabilistyczna, która spełnia prawo kontrapozycji* (CP) *lub lewe prawo kontrapozycji* (L-CP) *z jakąkolwiek negacją rozmytą N.*

Dowód. Niech I_C^p będzie implikacja probabilistyczną opartą na kopule C. Z lematu 5.7 wiemy, że każda implikacja probabilistyczna spełnia (NP). Natomiast z lematu 5.16 wiemy, że $N_{I_C^p} = N_{\mathbf{D1}}$. Ponieważ funkcja $N_{\mathbf{D1}}$ nie jest negacją silną, a funkcja I_C^p spełnia (NP), to na mocy lematu 5.16 funkcja I_C^p nie może spełniać (CP) z jakąkolwiek negacją. Ponadto, $N_{\mathbf{D1}}$ nie jest także funkcją ciągłą. Ponownie korzystając z lematu 5.16 otrzymujemy, że funkcja I_C^p nie spełnia (L-CP) z jakąkolwiek negacją. □

Twierdzenie 5.19 ([3, Lemma 3.5])**.** *Każda implikacja probabilistyczna spełnia* (R-CP) *tylko ze względu na najmniejszą negację rozmytą* N_{D1}.

Dowód. Załóżmy, że funkcja I_C^p jest implikacją probabilistyczną generowaną z kopuły C. Wtedy dla dowolnych $x, y \in [0,1]$ dostajemy

$$\begin{aligned}
I_C^p(x, N_{\mathbf{D1}}(y)) &= \begin{cases} 1, & x = 0 \\ \frac{C(x, N_{D1}(y))}{x}, & x > 0 \end{cases} = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ \frac{C(x,1)}{x}, & x > 0 \text{ i } y = 0 \\ \frac{C(x,0)}{x}, & x > 0 \text{ i } y > 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \text{ i } y = 0 \\ 0, & x > 0 \text{ i } y > 0 \end{cases} = \begin{cases} 1, & x = 0 \text{ lub } y = 0 \\ 0, & x, y > 0 \end{cases} \\
&= I_C^p(y, N_{\mathbf{D1}}(x)).
\end{aligned}$$

Stąd każda implikacja probabilistyczna I_C^p spełnia (R-CP) z $N_{\mathbf{D1}}$. Z lematu 5.7 wiemy, że każda implikacja probabilistyczna spełnia (NP). Ponadto z lematu 5.17 wiemy, że jeśli funkcja I spełnia (NP) i (R-CP) z negacją rozmytą N, to $N = N_I$. Stąd wynika, że dla każdej implikacji probabilistycznej I_C^p prawo prawej kontrapozycji zachodzi tylko dla negacji $N_{I_C^p} = N_{\mathbf{D1}}$. □

W klasie implikacji warunkowych istnieją funkcje spełniające wszystkie prawa kontrapozycji z każdą negacją silną.

Uwaga 5.20. Implikacja Geines-Reschera (która jest implikacją warunkową patrz przykład 4.19) spełnia prawo kontrapozycji (CP) ((L-CP) lub (R-CP)) z każdą negacją silną. W szczególności z negacją klasyczną $N_{\mathbf{C}}$.

Dowód. Niech N będzie negacją silną, oraz niech $x, y \in [0,1]$, wtedy

$$x \le y \iff N(y) \le N(x) \text{ i } N(x) \le y \iff N(y) \le x \text{ i } x \le N(y) \iff y \le N(x).$$

Ponieważ $I_{\mathbf{GR}}(x,y) = 1$ tylko gdy $x \le y$, a gdy $x > y$ to $I_{\mathbf{GR}}(x,y) = 0$, to kończy dowód. □

Lemat 5.21. *Każda implikacja warunkowa spełnia* (R-CP) *ze względu na najmniejszą negację rozmytą* N_{D1}.

Dowód. Załóżmy, że funkcja I_C^∂ jest implikacją warunkową generowaną z kopuły C.

Wtedy dla dowolnych $x, y \in [0,1]$ dostajemy

$$\begin{aligned} I_C^{\partial}(x, N_{\mathbf{D1}}(y)) &= \begin{cases} 1, & x = 0 \\ \frac{\partial^* C(x, N_{D1}(y))}{\partial x}, & x > 0 \end{cases} = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ \frac{\partial^* C(x,1)}{\partial x}, & x > 0 \text{ i } y = 0 \\ \frac{\partial^* C(x,0)}{\partial x}, & x > 0 \text{ i } y > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \text{ i } y = 0 \\ 0, & x > 0 \text{ i } y > 0 \end{cases} = \begin{cases} 1, & x = 0 \text{ lub } y = 0 \\ 0, & x, y > 0 \end{cases} \\ &= I_C^{\partial}(y, N_{\mathbf{D1}}(x)). \end{aligned}$$

Stąd każda implikacja warunkowa I_C^{∂} spełnia (R-CP) z $N_{\mathbf{D1}}$. □

Lemat 5.22 ([3, Proposition 3.7])**.** *Niech I_C^{sp} będzie implikacją s-probabilistyczną. Jeśli I_C^{sp} spełnia któreś z praw* (CP), (L-CP), (R-CP) *ze względu na negację N, to N jest negacją klasyczną $N_{\mathbf{C}}$.*

Dowód. Niech I_C^{sp} będzie implikacją s-probabilistyczną, z lematu 5.7 wiemy, że każda implikacja s-probabilistyczna spełnia (NP). Wystarczy rozważyć trzy przypadki.

1. I_C^{sp} spełnia (CP) z negacją rozmytą N, wtedy dla dowolnego $x \in [0,1]$:
$$N_{\mathbf{C}}(x) = N_{I_C^{sp}}(x) = I_C^{sp}(x,0) = I_C^{sp}(N(0), N(x)) = I_C^{sp}(1, N(x)) = N(x).$$
2. I_C^{sp} spełnia (L-CP) z negacją rozmytą N, wtedy dla dowolnego $x \in [0,1]$:
$$x = I_C^{sp}(1,x) = I_C^{sp}(N(0), x) = I_C^{sp}(N(x), 0) = N_{I_C^{sp}}(N(x)) = 1 - N(x),$$
skąd $N(x) = N_{\mathbf{C}}(x)$.
3. I_C^{sp} spełnia (R-CP) z negacją rozmytą N, wtedy dla dowolnego $x \in [0,1]$:
$$N_{\mathbf{C}}(x) = N_{I_C^{sp}}(x) = I_C^{sp}(x,0) = I_C^{sp}(x, N(1)) = I_C^{sp}(1, N(x)) = N(x).$$

□

Z uwagi na lemat 5.22 zamiast pisać, że implikacją s-probabilistyczna spełnia prawo (CP) ((L-CP) lub (R-CP)) ze względu na negację $N_{\mathbf{C}}$ będziemy pisać po prostu, że spełnia prawo (CP) ((L-CP) lub (R-CP)).

Twierdzenie 5.23 ([3, Corollary 3.8])**.** *Implikacja s-probabilistyczna I_C^{sp} oparta na kopule C spełnia każde z praw kontrapozycji (*(CP), (L-CP), (R-CP)*) wtedy i tylko wtedy, gdy C spełnia warunek* (CCP)*, czyli*
$$C(x,y) = x + y - 1 + C(1-y, 1-x), \tag{CCP}$$
dla każdych $x, y \in [0,1]$.

Dowód. Rozważmy trzy przypadki.

1. I_C^{sp} spełnia (CP), wtedy i tylko wtedy, gdy dowolnych $x, y \in [0,1]$:
$$\begin{aligned} I_C^{sp}(x,y) = I_C^{sp}(1-y, 1-x) &\iff C(x,y) + 1 - x = C(1-y, 1-x) + y \\ &\iff C(x,y) = x + y - 1 + C(1-y, 1-x). \end{aligned}$$

2. I_C^{sp} spełnia (L-CP), wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\begin{aligned} & \forall_{x,y\in[0,1]} \quad I_C^{sp}(1-x,y) = I_C^{sp}(1-y,x) \\ & \iff \forall_{x,y\in[0,1]} \quad C(1-x,y)+x = C(1-y,x)+y \\ (\text{zamieniając } x \text{ z } 1-x) & \iff \forall_{x,y\in[0,1]} \quad C(x,y) = x+y-1+C(1-y,1-x). \end{aligned}$$

3. I_C^{sp} spełnia (R-CP), wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\begin{aligned} & \forall_{x,y\in[0,1]} \quad I_C^{sp}(x,1-y) = I_C^{sp}(y,1-x) \\ & \iff \forall_{x,y\in[0,1]} \quad C(x,1-y)+1-x = C(y,1-x)+1-y \\ (\text{zamieniając } y \text{ z } 1-y) & \iff \forall_{x,y\in[0,1]} \quad C(x,y) = x+y-1+C(1-y,1-x). \end{aligned}$$

□

Na mocy twierdzenia 2.24 otrzymujemy odpowiedź dla jakich kopuł łącznych implikacja I_C^{sp} spełnia warunki (CP), (L-CP), (R-CP).

Twierdzenie 5.24. *Załóżmy, że kopuła C jest łączna. Wtedy implikacja I_C^{sp} spełnia prawo* (CP) *(*(L-CP) *lub* (R-CP)*) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie $\lambda \in [0,\infty]$, że $C = T_\lambda^{\boldsymbol{F}}$ lub gdy C jest sumą porządkową t-norm Franka, czyli*

$$C = (\langle a_k, b_k, T_{\lambda_k}^{\boldsymbol{F}}\rangle)_{k\in K},$$

gdzie dla każdego $k \in K$ istnieje takie $k' \in K$, że $\lambda_k = \lambda_{k'}$ oraz $a_k+b_{k'} = a_{k'}+b_k = 1$.

Na mocy wniosku 2.29 i twierdzenia 2.30 otrzymujemy następujące dwa wnioski.

Wniosek 5.25. *Jeśli implikacje $I_{C_1}^{sp}, I_{C_2}^{sp}$ spełniają prawo* (CP) *(*(L-CP) *lub*(R-CP)*), to implikacja $I_{C_\lambda}^{sp}$ także spełnia prawo* (CP) *(*(L-CP) *lub* (R-CP)*), dla dowolnego $\lambda \in [0,1]$, gdzie kopuła $C_\lambda = \lambda C_1 + (1-\lambda)C_2$ (jest kombinacją wypukła kopuł C_1, C_2).*

Wniosek 5.26. *Implikacja s-probabilistyczna I_D^{sp} oparta na kopule D spełnia prawo* (CP) *(*(L-CP) *lub* (R-CP)*) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka kopuła C, że kopułę D można zapisać w następującej postaci:*

$$D = \frac{C+\tilde{C}}{2}.$$

Istnieją implikacje s-probabilistyczne oparte na nieprzemiennej kopule spełniające prawo (CP) ((L-CP) lub (R-CP)).

Przykład 5.27. Niech I_{D2}^{sp} będzie implikacją s-probabilistyczną opartą na kopule D_2 (patrz przykład 2.31) wtedy implikacja I_{D2}^{sp} spełnia prawo (CP) ((L-CP) lub (R-CP)) ale kopuła D_2 nie jest kopułą przemienną.

5.3 T-conditionality

Implikacje odgrywają ważną rolę w procesach dedukcyjnych logiki, które są realizowane przez reguły wnioskowania. *Modus ponens* jest jedną z takich reguł, której schemat przedstawia się następująco

Reguła	$\varphi \longrightarrow \psi$
Fakt	φ
Wniosek	ψ

We wnioskowaniu przybliżonym opartym na logice rozmytej zakładamy, że zdaniom występujące w regułach odpowiadają pewne zbiory rozmyte. Zgodnie z ogólnie przyjętą formą regułę rozmyta w najprostszej postaci zapisuje się następująco:

$$\text{IF } \tilde{x} \text{ is } A \text{ THEN } \tilde{y} \text{ is } B,$$

gdzie $A \in \mathcal{F}(X)$, $B \in \mathcal{F}(Y)$ są zbiorami rozmytymi (dla pewnych niepustych zbiorów X, Y), $\tilde{x}, \tilde{y}$ są tzw. zmiennymi lingwistycznymi, przy czym $\tilde{x}$ nazywamy zmienną wejściową, a $\tilde{y}$ zmienną wyjściową. Zapis „$\tilde{x}$ is A" rozumiemy jako wartość $A(a)$, gdzie $\tilde{x} = a \in X$. Przykładowo taka reguła może mieć postać

$$\text{IF } \tilde{x} \text{ (temperatura) is } A \text{ (wysoka) THEN } \tilde{y} \text{ (ciśnienie) is } B \text{ (niskie).}$$

Uogólniona regułę Modus Ponens (ang. *Generalized Modus Ponens*) (GMP) określa schemat wnioskowania

Reguła	IF $\tilde{x}$ is A THEN $\tilde{y}$ is B
Fakt	$\tilde{x}$ is A_1
Wniosek	$\tilde{y}$ is B_1

gdzie $A, A_1 \in \mathcal{F}(X)$, $B, B_1 \in \mathcal{F}(Y)$ są zbiorami rozmytymi (dla pewnych niepustych zbiorów X, Y), $\tilde{x}, \tilde{y}$ są zmiennymi lingwistycznymi. W literaturze można znaleźć rożne schematy wnioskowania, które realizują GMP. Jednym z najważniejszych jest wnioskowanie oparte na złożeniu relacji rozmytych (ang. *compositional rule of inference*) (CRI). W CRI B_1 wyznaczamy w następujący sposób

$$B_1(y) = \sup_{x \in X} T(A_1(x), I(A(x), B(y))),$$

gdzie $A, A_1 \in \mathcal{F}(X)$, $B, B_1 \in \mathcal{F}(Y)$, a T jest t-normą oraz I jest implikacją rozmytą. Jednym z warunków, który każdy system wnioskowania zastosowany do realizacji GMP musi spełniać, jest to, że GMP powinien się pokrywać z T-conditionality (patrz [6],[56]). Warunek T-conditionality jest bardzo ważną własnością implikacji, ponieważ tylko te pary implikacji I i t-normy T które spełniają ten warunek, mogą być użyte do CRI.

Definicja 5.28 ([6, Definition 7.4.1])**.** Implikacja rozmyta I i t-norma T spełniają T***-conditionality*** wtedy i tylko wtedy, gdy

$$T(x, I(x, y)) \leq y, \qquad \text{dla wszystkich } x, y \in [0, 1]. \tag{TC}$$

Twierdzenie 5.29 ([3, Theorem 4.2])**.** *Dla dowolnej kopuły C następujące warunki są równoważne:*

(i) I_C^p *spełnia* (TC) *z każdą t-normą* T.

(ii) $C(x,y) \le xy$, *dla wszystkich takich* $x, y \in [0,1]$, *że* $x > y$.

Dowód.

(i)$\Longrightarrow$(ii) Jeśli I_C^p spełnia (TC) z każdą t-normą, to w szczególności spełnia (TC) z t-normą minimum $T_{\mathbf{M}}$, czyli dla $x \in (0,1]$, $y \in [0,1]$

$$T_{\mathbf{M}}(x, I_C^p(x,y)) = \min\left(x, \frac{C(x,y)}{x}\right) \le y,$$

W szczególności, gdy $x > y$, to oznacza, że $\frac{C(x,y)}{x} \le y$. Stąd dostajemy (ii).

(ii)$\Longrightarrow$(i) Ponieważ największą t-normą jest t-norma minimum, stąd dla każdej t-normy T

$$T(x, I_C^p(x,y)) \le \min(x, I_C^p(x,y)) \le y,$$

dla wszystkich takich $x, y \in [0,1]$, że $x \le y$. Pozostaje jedynie do sprawdzenia przypadek, gdy $x, y \in [0,1]$ są takie, że $x > y \ge 0$. Ponieważ każda t-norma jest niemalejąca ze względu na obie zmienne, więc

$$T(x, I_C^p(x,y)) = T\left(x, \frac{C(x,y)}{x}\right) \le T\left(x, \frac{xy}{x}\right) = T(x,y) \le \min(x,y) = y,$$

co kończy dowód twierdzenia. □

Twierdzenie 5.30. *Niech* C *będzie kopułą i niech implikacja warunkowa* I_C^∂ *będzie implikacją rozmytą generowaną z kopuły* C. *Wówczas jeśli* I_C^p *spełnia* (TC) *z t-normą* T, *to* I_C^∂ *spełnia* (TC) *z t-normą* T.

Dowód. Z wniosku 4.35 wynika, że $I_C^\partial \le I_C^p$, stąd dla dowolnych $x, y \in [0,1]$

$$T(x, I_C^\partial(x,y)) \le T(x, I_C^p(x,y)) \le y,$$

co dowodzi, że I_C^∂ spełnia (TC) z t-normą T. □

Powyższe twierdzenie nie musi zachodzić w drugą stronę.

Przykład 5.31. Implikacja warunkowa $I_{\mathbf{GR}} = I_M^\partial$ jest implikacją rozmytą oraz spełnia (TC) z każdą t-normą. Istotnie, niech T będzie t-normą i niech $x, y \in [0,1]$, wtedy

$$T(x, I_{\mathbf{GR}}(x,y)) \le \min(x, I_{\mathbf{GR}}(x,y)) \le y,$$

ponieważ $I_{\mathbf{GR}}(x,y) = 1$ tylko, gdy $x \le y$, a gdy $x > y$ to $I_{\mathbf{GR}}(x,y) = 0$. Natomiast, kopuła M nie spełnia warunku (ii) z twierdzenia 5.29, czyli implikacja probabilistyczna I_M^p nie spełnia (TC) z t-normą $T_{\mathbf{M}}$.

Wniosek 5.32 ([3, Proposition 4.3])**.** *T-norma* $T_{\mathbf{P}}$ *(i każda od niej mniejsza* $T \le T_{\mathbf{P}}$*) spełnia* (TC) *z każdą implikacją probabilistyczną.*

Dowód. Niech C będzie kopułą, a I_C^p implikacją probabilistyczną opartą na kopule C. Dla wszystkich $x, y \in [0,1]$ mamy

$$T_{\mathbf{P}}(x, I_C^p(x,y)) = x I_C^p(x,y) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ x\frac{C(x,y)}{x} = C(x,y), & x > 0. \end{cases}$$

Stąd, $T_{\mathbf{P}}(x, I_C^p(x,y)) = C(x,y) \le \min(x,y) \le y$, co dowodzi tezy. □

Twierdzenie 5.33 ([3, Proposition 4.5]). *Nie istnieje implikacja s-probabilistyczna spełniająca* (TC) *z t-normą* $T_{\mathbf{M}}$.

Dowód. Niech I_C^{sp} będzie implikacją s-probabilistyczną. Jeśli I_C^{sp} i $T_{\mathbf{M}}$ spełniają (TC), to dla wszystkich takich $x, y \in [0,1]$, że $x > y$ mamy

$$T_{\mathbf{M}}(x, I_C^{sp}(x,y)) = \min(x, C(x,y) - x + 1) \leq y \Rightarrow C(x,y) \leq x + y - 1,$$

co nigdy nie jest prawdziwe dla takich $x, y \in [0,1]$, że $x + y < 1$, ponieważ kopuła jest nieujemną funkcją. □

Twierdzenie 5.34 ([3, Proposition 4.6]). *Każda implikacja s-probabilistyczna spełnia* (TC) *z t-normą* $T_{\mathbf{LK}}$.

Dowód. Niech I_C^{sp} będzie implikacją s-probabilistyczną. Funkcje I_C^{sp} i $T_{\mathbf{LK}}$ spełniają (TC) wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich $x, y \in [0,1]$

$$T_{\mathbf{LK}}(x, I_C^{sp}(x,y)) \leq y \iff \max(x + C(x,y) - x + 1 - 1, 0) \leq y \iff C(x,y) \leq y,$$

co jest zawsze prawdziwe. □

5.4 Przecięcia z R-implikacjami

Twierdzenie 5.35 ([3, Proposition 5.3]). *Jedyną implikacją probabilistyczną, która jest jednocześnie R-implikacją jest implikacja Goguena,*

$$\mathbb{I}_{\mathbb{T}} \cap \mathbb{I}_{\mathbb{C}}^{prob} = \{I_{\mathbf{GG}}\}.$$

Dowód. Na mocy twierdzenia 3.4 każda R-implikacja spełnia (OP), skąd spełnia (IP). Z drugiej strony na mocy lematu 5.9, implikacja probabilistyczna I_C^p oparta na kopule C spełnia własność identyczności (IP) wtedy i tylko wtedy, gdy I_C^p jest implikacją Goguena. Implikacja Goguena jest R-implikacją generowaną z t-normy $T_{\mathbf{P}}$. Stąd otrzymujemy, że $\mathbb{I}_{\mathbb{T}} \cap \mathbb{I}_{\mathbb{C}}^{prob} = \{I_{\mathbf{GG}}\}$. □

Twierdzenie 5.36 ([3, Proposition 5.4]). *Jedyną implikacją s-probabilistyczną, która jest R-implikacją jest implikacja Łukasiewicza,*

$$\mathbb{I}_{\mathbb{T}} \cap \mathbb{I}_{\mathbb{C}}^{sprob} = \{I_{\mathbf{LK}}\}.$$

Dowód. Na mocy twierdzenia 3.4 każda R-implikacja spełnia (OP), skąd spełnia (IP). Z drugiej strony na mocy lematu 5.13, implikacja s-probabilistyczna I_C^{sp} oparta na kopule C spełnia własność identyczności (IP) wtedy i tylko wtedy, gdy $I_C^{sp} = I_{\mathbf{LK}}$. Oczywiście implikacja Łukasiewicza jest R-implikacją generowaną z t-normy $T_{\mathbf{LK}}$. Wtedy $\mathbb{I}_{\mathbb{T}} \cap \mathbb{I}_{\mathbb{C}}^{sprob} = \{I_{\mathbf{LK}}\}$. □

Twierdzenie 5.37. *Nie istnieje implikacją warunkową, która jest R-implikacją,*

$$\mathbb{I}_{\mathbb{T}} \cap \mathbb{I}_{\mathbb{C}}^{cond} = \emptyset.$$

Dowód. Na mocy twierdzenia 3.4 każda R-implikacja spełnia (OP), skąd spełnia (IP). Z drugiej strony na mocy lematu 5.11, implikacja warunkowa I_C^{∂} oparta na kopule C spełnia własność identyczności (IP) wtedy i tylko wtedy, gdy $I_C^{\partial} = I_{\mathbf{GR}}$ jest implikacją Gaines-Reschera. Implikacja Gaines-Reschera nie jest R-implikacją. Istotnie, gdyby implikacja $I_{\mathbf{GR}}$ byłaby R-implikacją dla pewnej t-normy T, to gdy $x > y > 0$, to $T(x,t) > y$, dla $t \in (0,1]$, ponieważ $I_{\mathbf{GR}}(x,y) = 0$, dla $x > y$. Natomiast wtedy $\frac{y}{2} \geq T(x, \frac{y}{2}) > y$, co prowadzi do sprzeczności. □

5.5 Przecięcia z (S,N)-implikacjami

Twierdzenie 5.38 ([3, Proposition 5.5]). *Jedyną implikacją probabilistyczną, która jest (S,N)-implikacją jest implikacja probabilistyczna oparta na produktowej kopule,*

$$\mathbb{I}_{\mathbb{S},\mathbb{N}} \cap \mathbb{I}_{\mathbb{C}}^{prob} = \{I_{\mathbf{D}}\}.$$

Dowód. Jeśli implikacja probabilistyczna I_C^p oparta na kopule C jest także (S,N)-implikacją, $I_C^p \in \mathbb{I}_{\mathbb{S},\mathbb{N}} \cap \mathbb{I}_{\mathbb{C}}^{prob}$, to istnieje taka t-konorma S oraz negacja rozmyta N, że $I_C^p(x,y) = S(N(x),y)$, dla wszystkich $x, y \in [0,1]$. Stąd

$$I_C^p(x,0) = S(N(x),0) = N(x), \qquad x \in [0,1].$$

więc z lematu 5.7 $N = N_{\mathbf{D1}}$. To implikuje, że $I_C^p(x,y) = S(0,y) = y$, dla $x > 0$. Stąd dla $x > 0$ otrzymujemy, że $C(x,y) = xy = \Pi(x,y)$. Wtedy $I_C^p = I_\Pi^p = I_{\mathbf{D}}$ jest najmniejszą (S,N)-implikacją, co kończy dowód. □

Twierdzenie 5.39. *Jedyną implikacją warunkową, która jest (S,N)-implikacją jest implikacja warunkowa oparta na produktowej kopule,*

$$\mathbb{I}_{\mathbb{C}}^{cond} \cap \mathbb{I}_{\mathbb{C}}^{prob} = \{I_{\mathbf{D}}\}.$$

Dowód. Podobnie jak w dowodzie poprzedniego twierdzenia załóżmy, że implikacja warunkowa I_C^∂ oparta na kopule C jest także (S,N)-implikacją, $I_C^\partial \in \mathbb{I}_{\mathbb{C}}^{cond} \cap \mathbb{I}_{\mathbb{C}}^{prob}$. Wtedy istnieje taka t-konorma S oraz negacja rozmyta N, że $I_C^\partial(x,y) = S(N(x),y)$, dla wszystkich $x, y \in [0,1]$. Stąd $I_C^\partial(x,0) = S(N(x),0) = N(x)$, więc z lematu 5.3 $N = N_{\mathbf{D1}}$. To implikuje, że $I_C^\partial(x,y) = S(0,y) = y$, dla $x > 0$. Stąd z ciągłości bezwzględnej C otrzymujemy, że dla dowolnego $x \in (0,1]$ i $y \in [0,1]$

$$C(x,y) = \int_0^x \frac{\partial C(t,y)}{\partial t} dt = \int_0^x y dt = xy.$$

Zatem $I_C^\partial = I_\Pi^\partial = I_{\mathbf{D}}$, co kończy dowód. □

Lemat 5.40. *Niech C będzie kopułą. Wtedy funkcja $C_{0,1}\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ postaci*

$$C_{0,1}(x,y) = x - C(x,1-y), \qquad x,y \in [0,1], \tag{5.3}$$

jest także kopuła. Ponadto $C(x,y) = x - C_{0,1}(x,1-y)$ dla każdych $x, y \in [0,1]$.

Dowód. Funkcja $C_{0,1}$ jest kopułą. Istotnie,

(C1) $C_{0,1}(x,0) = x - C(x,1) = 0 = 0 - C(0,1-y) = C_{0,1}(0,y), \quad x,y \in [0,1];$

(C2) $C_{0,1}(x,1) = x - C(x,0) = x, \quad x \in [0,1];$

(C3) $C_{0,1}(1,y) = 1 - C(1,1-y) = 1 - (1-y) = y, \quad y \in [0,1];$

(C4) Niech $x_1, x_2, y_1, y_2 \in [0,1]$ będą takie, że $x_1 \le x_2$ i $y_1 \le y_2$. Wtedy

$$\begin{aligned}
&C_{0,1}(x_2,y_2) - C_{0,1}(x_2,y_1) - C_{0,1}(x_1,y_2) + C_{0,1}(x_1,y_1) \ge 0 \Leftrightarrow x_2 - C(x_2,1-y_2) \\
&- x_2 + C(x_2,1-y_1) - x_1 + C(x_1,1-y_2) + x_1 - C(x_1,y_1) \ge 0 \Leftrightarrow \\
&C(x_2,y_1') - C(x_2,y_1') - C(x_1,y_2') + C(x_1,y_2') \ge 0
\end{aligned}$$

gdzie $y_1' = 1 - y_1$ i $y_2' = 1 - y_2$, stąd $y_2' \le y_1'$ i funkcja $C_{0,1}$ spełnia warunek **(C4)**.

Z definicji 1.52 otrzymujemy, że funkcja $C_{0,1}$ jest kopułą. Ponadto, zamieniając y na $1-y$ w równaniu (5.3) otrzymujemy pozostałą tezę twierdzenia. □

Oznaczenia $C_{0,1}$ zostało użyte nieprzypadkowo.

Twierdzenie 5.41 ([49, Theorem 2.7.3]). *Niech X oraz Y będą zmiennymi losowymi ze wspólną dystrybuantą H i brzegowymi dystrybuantami F oraz G, odpowiednio. Niech $C_{F,G}$ będzie odpowiednią kopułą dystrybuanty H (z twierdzenia Sklara) i załóżmy, że funkcje $\varphi, \psi\colon [0,1] \to [0,1]$ są funkcjami ściśle monotonicznymi. Wtedy*

$$C_{\varphi\circ F,\psi\circ G} = \begin{cases} (C_{F,G})_{0,0}, & \varphi \text{ i } \psi \text{ są rosnące;} \\ (C_{F,G})_{0,1}, & \varphi \text{ jest rosnąca, a } \psi \text{ jest malejąca;} \\ (C_{F,G})_{1,0}, & \varphi \text{ jest malejąca, a } \psi \text{ jest rosnąca;} \\ (C_{F,G})_{1,1}, & \varphi \text{ i } \psi \text{ są malejące,} \end{cases}$$

gdzie $(C_{F,G})_{0,0} = C$, $(C_{F,G})_{1,1} = C^*$ oraz $C_{0,1}(x,y) = x - C(x,1-y)$, $C_{1,0}(x,y) = y - C(1-x,y)$ dla dowolnych $x, y \in [0,1]$.

Twierdzenie 5.42 (por. [3, Lemma 5.6, Theorem 5.7]). *Niech S będzie t-konormą, a N negacją rozmytą. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(i) Implikacja $I_{S,N}$ jest implikacją s-probabilistyczną.

(ii) $N = N_{\mathbf{C}}$ oraz istnieje taka kopuła C, że

$$C(x,y) = S(1-x,y) + x - 1, \qquad x,y \in [0,1].$$

(iii) $N = N_{\mathbf{C}}$ oraz t-konorma S spełnia następujący warunek

$$S(x_1,y_1) + S(x_2,y_2) - S(x_1,y_2) - S(x_2,y_1) \le 0,$$

dla wszystkich takich $x_1,x_2,y_1,y_2 \in [0,1]$, że $x_1 \le x_2, y_1 \le y_2$.

(iv) $N = N_{\mathbf{C}}$ oraz t-konorma S jest dualna do t-normy T będącej kopułą.

Dowód.

(i)$\Longrightarrow$(ii) Załóżmy, że $I_{S,N} \in \mathbb{I}^{sprob}_{\mathbb{C}}$. Wtedy istnieje taka kopułą C, że

$$C(x,y) - x + 1 = S(N(x),y), \qquad x,y \in [0,1]. \tag{5.4}$$

Wstawiając $y = 0$ w (5.4) otrzymujemy, że $-x+1 = S(N(x),0) = N(x)$, co oznacza, że $N(x) = 1 - x = N_{\mathbf{C}}(x)$. Stąd równanie (5.4) może być wyrażone dla dowolnych $x, y \in [0,1]$, następująco

$$C(x,y) = S(1-x,y) + x - 1. \tag{5.5}$$

(ii)$\Longrightarrow$(iii) Załóżmy, że $N = N_{\mathbf{C}}$ i kopuła C spełnia równanie (5.5). Wtedy w szczególności kopuła C spełnia warunek (**C4**), czyli dla wszystkich takich $x_1,x_2,y_1,y_2 \in [0,1]$, że $x_1 \le x_2, y_1 \le y_2$:

$$C(x_2,y_2) - C(x_2,y_1) - C(x_1,y_2) + C(x_1,y_1) \ge 0 \Longleftrightarrow S(1-x_2,y_2) + x_2 - 1 - S(1-x_2,y_1)$$
$$-x_2 + 1 - S(1-x_1,y_2) - x_1 + 1 + S(1-x_1,y_1) + x_1 - 1 \ge 0 \Longleftrightarrow$$
$$S(x_1',y_2) - S(x_1',y_1) - S(x_2',y_2) + S(x_2',y_1) \ge 0,$$

gdzie $x_1' = 1 - x_2$ i $x_2' = 1 - x_1$. Ponieważ $x_1 \le x_2$, stąd ostatnia nierówność zachodzi, dla dowolnych $x_2' \le x_1'$.

(iii)$\Longrightarrow$(iv) Niech $N = N_{\mathbf{C}}$ i T będzie taką t-normą, że $S(x, y) = 1 - T(1 - x, 1 - y)$. Wówczas dla takich $x_1, x_2, y_1, y_2 \in [0, 1]$, że $x_1 \leq x_2$ i $y_1 \leq y_2$ otrzymujemy

$$S(x_1, y_1) + S(x_2, y_2) - S(x_1, y_2) - S(x_2, y_1) \leq 0 \Longleftrightarrow 1 - T(1 - x_1, 1 - y_1)$$

$$+1 - T(1 - x_2, 1 - y_2) - 1 + T(1 - x_1, 1 - y_2) - 1 + T(1 - x_2, 1 - y_1) \leq 0 \Longleftrightarrow$$

$$T(x'_1, y'_1) + T(x'_2, y'_2) - T(x'_1, y'_2) - T(x'_2, y'_1) \geq 0,$$

gdzie $x'_1 = 1 - x_1$, $x'_2 = 1 - x_2$, $y'_1 = 1 - y_1$ i $y'_2 = 1 - y_2$, $x'_2 \leq x'_1$ oraz $y'_2 \leq y'_1$. Ostatnia nierówność jest równoważna z nierównością (**C4**) w Definicji 1.52.

(iv)$\Longrightarrow$(ii) Załóżmy, że $N = N_{\mathbf{C}}$ i t-konorma S jest dualna do t-normy T będącej kopułą. Rozważmy funkcje $C \colon [0, 1]^2 \to [0, 1]$ określoną wzorem

$$C(x, y) = x - T(x, 1 - y), \qquad x, y \in [0, 1].$$

Taka określona funkcja jest kopułą na mocy lematu 5.40. Wtedy

$$C(x, y) = x - T(x, 1 - y) = x - (1 - S(1 - x, y)) = S(1 - x, y) + x - 1, \qquad x, y \in [0, 1],$$

oraz $N = N_{\mathbf{C}}$.

(ii)$\Longrightarrow$(i) Załóżmy, $N = N_{\mathbf{C}}$ i C jest taką kopułą, że spełnia równanie (5.5). To natychmiast dowodzi, że $I_{S,N} \in \mathbb{I}_{\mathbb{C}}^{sprob}$ dla $N = N_{\mathbf{C}}$. □

Powyższe twierdzenie prowadzi do następującego wniosku.

Wniosek 5.43. *(S,N)-implikacja $I_{S,N}$ jest implikacją s-probabilistyczną wtedy i tylko wtedy, gdy $N = N_{\mathbf{C}}$ ora t-konormą S jest sumą porządkową t-konorm ciągłych archimedesowych o wypukłym generatorze.*

5.6 Prawo importacji

Jedną z dobrze znanych tautologii w klasycznej logice jest prawo importacji, zdefiniowane następującą równoważnością

$$(p \wedge q) \to r \equiv (p \to (q \to r)).$$

W logice rozmytej prawo importacji definiujemy następująco.

Definicja 5.44 ([32])**.** Niech I będzie implikacją rozmytą, a N negacją rozmytą. Powiemy, że I spełnia ***prawo importacji*** (ang. *law of importation*) z t-normą T, jeśli

$$I(x, I(y, z)) = I(T(x, y), z), \qquad x, y, z \in [0, 1]. \tag{LI}$$

Uwaga 5.45 ([51, Theorem 3.1.3])**.** Jeśli implikacja probabilistyczna I_C^p i t-norma T spełniają prawo importacji (LI), to T jest dodatnia, czyli $\neg \exists_{x,y \neq 0}\, T(x, y) = 0$.

Dowód. Z lematu 5.1 wiemy, że $N_{I_C^p} = N_{\mathbf{D1}}$, więc

$$I_C^p(T(x, y), 0) = \begin{cases} 1, & T(x, y) = 0, \\ 0, & T(x, y) > 0. \end{cases}$$

Przypuśćmy, że istnieją takie $x_0, y_0 \neq 0$, że $T(x_0, y_0) = 0$. Wtedy $I_C^p(T(x_0, y_0), 0) = 1$. Aczkolwiek

$$I_C^p(x_0, I_C^p(y_0, 0)) = I_C^p(x_0, 0) = 0,$$

co jest sprzeczne z założeniem, że I_C^p i T spełniają prawo importacji (LI). □

Załóżmy, że $x, y, z \neq 0$. W tym przypadku (LI) z t-normą T dla implikacji probabilistycznej I_C^p jest równoważne z równaniem

$$\frac{C(T(x,y),z)}{T(x,y)} = \frac{C(x, \frac{C(y,z)}{y})}{x}.$$

Przykład 5.46 ([3, Example 3.13])**.** Z powyższego równania otrzymujemy

(i) I_Π^p spełnia (LI) z każdą dodatnią t-normą T.

(ii) I_M^p spełnia (LI) tylko z t-normą T_P.

(iii) I_W^p spełnia(LI) tylko z t-normą T_P.

(iv) Implikacja probabilistyczna $I_{C_\theta}^p$ oparta na kopule $C_\theta \in \mathrm{FGM}(\theta)$ nie spełnia prawa (LI) z żadną t-normą T, z wyjątkiem przypadku kiedy $\theta = 0$ (ale jeśli $\theta = 0$, to $C_\theta = \Pi$).

Przykład 5.47. Produkt Hamachera $C_{\mathbf{H}}$ jest t-normą ścisłą o generatorze $\varphi(x) = \frac{1}{x} - 1$ (patrz [49]). Implikacja probabilistyczna $I_{C_{\mathbf{H}}}^p$ spełnia prawo importacji z t-normą $T_{\mathbf{P}}$. Istotnie, gdy $x, y, z \in (0,1]$, to

$$\begin{aligned}
\frac{C_{\mathbf{H}}(x, \frac{C_{\mathbf{H}}(y,z)}{y})}{x} &= \frac{x\frac{yz}{y(y+z-yz)}}{x(x + \frac{yz}{y(y+z-yz)} - \frac{xyz}{y(y+z-yz)})} = \frac{\frac{z}{y+z-yz}}{\frac{xy+xz-xyz+z-xz}{y+z-yz}} \\
&= \frac{z}{xy+z-xyz} = \frac{xyz}{xy(xy+z-xyz)} \\
&= \frac{C_{\mathbf{H}}(xy,z)}{xy}.
\end{aligned}$$

Przykład 5.48. Każda implikacja probabilistyczna generowana z kopuły $C_{f,d}$ z rodziny DUCS spełnia prawo importacji z t-normą $T_{\mathbf{P}}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $d(x) = 1$ lub $d(x) = x^\alpha$, dla $\alpha \in (0,1]$. Istotnie, gdy $x, y, z \in (0,1]$, to ponieważ $f(0) \leq \frac{f(0)}{d(x)}$ dla $x \in (0,1]$, wówczas

$$\begin{aligned}
\frac{C_{f,d}(x, \frac{C_{f,d}(y,z)}{y})}{x} &= \frac{xf^{-1}(\min\{f(0), \frac{f\left(\frac{yf^{-1}(\min\{f(0), \frac{f(z)}{d(y)}\})}{y}\right)}{d(x)}\})}{x} \\
&= f^{-1}(\min\{f(0), \frac{\min\{f(0), \frac{f(z)}{d(y)}\}}{d(x)}\})) \\
&= f^{-1}(\min\{f(0), \frac{f(z)}{d(x)d(y)}\}.
\end{aligned}$$

Z drugiej strony

$$f^{-1}(\min\{f(0), \frac{f(z)}{d(xy)}\}) = \frac{C_{f,d}(xy,z)}{xy},$$

czyli implikacja probabilistyczna $I_{C_{f,d}}^p$ spełnia prawo (LI) z t-normą $T_{\mathbf{P}}$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$d(xy) = d(x)d(y) \qquad x, y \in [0,1].$$

Jest to znane równanie które ma rozwiązanie ciągłe postaci $d(x) = 1$ lub $d(x) = 0$ lub $d(x) = x^{\alpha}$, dla $\alpha \in \mathbb{R}$ (patrz twierdzenie 3.1.6 [37]). Dla funkcji d istnieje funkcja niemalejąca $\tilde{d}$ spełniająca równanie $d(x)\tilde{d}(x) = x$ wtedy i tylko wtedy, gdy $d(x) = 1$ lub $d(x) = x^{\alpha}$ dla $\alpha \in (0, 1]$. Analogiczny fakt zachodzi dla implikacji probabilistycznych generowanych z kopuł $C_{g,d}$, gdzie $g(x) = f(1 - x)$. Zauważmy, że jeśli implikacja probabilistyczna $I^{p}_{C_{f,d}}$ generowana z kopuły $C_{f,d}$ z rodziny DUCS spełnia prawo importacji z t-normą $T_{\mathbf{P}}$, to $I^{p}_{C_{f,d}} = I_{\mathbf{D}}$ albo kopuła $C_{f.d}$ jest kopułą z przykładu 4.6. Istotnie ([46, Proposition 4.3]), jeśli $d(x) = x^{\frac{1}{\lambda}}$ dla $\lambda \in [1, \infty)$, to

$$C_{f^{\lambda}}(x, y) = xf^{(-1)}\left(\left(\frac{f^{\lambda}(y)}{x}\right)^{\frac{1}{\lambda}}\right) = xf^{(-1)}\left(\frac{f(y)}{x^{\frac{1}{\lambda}}}\right) = C_{f,d}(x, y),$$

a funkcja f^{λ} jest funkcją wypukłą. Jeśli $d(x) = 1$, to $I^{p}_{C_{f,d}} = I_{\mathbf{D}}$.

Lemat 5.49 ([3, Proposition 3.14])**.** *Jeśli implikacja s-probabilistyczna* I^{sp}_{C} *i t-norma* T *spełniają prawo importacji* (LI)*, to* T *musi być postaci*

$$T(x, y) = x - C(x, 1 - y), \qquad x, y \in [0, 1]. \tag{5.6}$$

Dowód. Załóżmy, że I^{sp}_{C} spełnia (LI) z t-normą T, z definicji I^{sp}_{C} otrzymujemy

$$C(T(x, y), z) - T(x, y) + 1 = C(x, C(y, z) - y + 1) - x + 1, \quad x, y, z \in [0, 1].$$

Wstawiając $z = 0$ mamy

$$0 - T(x, y) + 1 = C(x, 0 - y + 1) - x + 1,$$

co jest równoważne z $T(x, y) = x - C(x, 1 - y)$. □

Lemat 5.50 ([40, Proposition 11])**.** *Niech* I *będzie (S,N)-implikacją otrzymaną z t-konormy* S *i negacji klasycznej* $N_{\mathbf{C}}$*. Wtedy* I *spełnia prawo* (LI) *z t-normą dualną do t-konormy* S *czyli z t-normą postaci*

$$T(x, y) = N_{\mathbf{C}}(S(N_{\mathbf{C}}(x), N_{\mathbf{C}}(y))) = 1 - S(1 - x, 1 - y), \qquad x, y \in [0, 1].$$

Dowód. Załóżmy, że I jest (S,N)-implikacją otrzymaną z t-konormy S i negacji klasycznej $N_{\mathbf{C}}$ oraz T jest t-normą dualną do t-konormy S. Wtedy wykorzystując fakt, iż negacja klasyczna jest negacją silną oraz łączność t-konormy S, otrzymujemy dla dowolnych $x, y, z \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} I(T(x, y), z) &= S(N_{\mathbf{C}}(T(x, y)), z) = S(N_{\mathbf{C}}(N_{\mathbf{C}}(S(N_{\mathbf{C}}(x), N_{\mathbf{C}}(y)))), z) \\ &= S(S(N_{\mathbf{C}}(x), N_{\mathbf{C}}(y)), z) = S(N_{\mathbf{C}}(x), S(N_{\mathbf{C}}(y), z)) \\ &= I(x, I(y, z)), \end{aligned}$$

co dowodzi tezy twierdzenia. □

Twierdzenie 5.51. *Niech* I^{sp}_{C} *będzie implikacją s-probabilistyczną. Wtedy funkcja* I^{sp}_{C} *spełnia prawo* (LI) *z pewną t-normą wtedy i tylko wtedy, gdy* I^{sp}_{C} *jest (S,N)-implikacją.*

Dowód.

$\Rightarrow$ Załóżmy, że implikacja s-probabilistyczna I_C^{sp} generowana z kopuły C spełnia prawo (LI) z t-normą T. Z lematu 5.49 wiemy, że zachodzi wzór (5.6). Niech S będzie t-konormą dualną do t-normy T. Wtedy

$$C(x,y) = x - (1 - S(1-x,y)) = x - 1 + S(1-x,y), \qquad x,y \in [0,1],$$

czyli I_C^{sp} jest (S,N)-implikacją.

$\Leftarrow$ Załóżmy, że implikacja s-probabilistyczna I_C^{sp} generowana z kopuły C jest (S,N)-implikacją. Z twierdzenia 5.42 istnieje taka t-konorma S, że $I_C^{sp} = I_{S,N_\mathbf{C}}$. Na mocy lematu 5.50 implikacja I_C^{sp} spełnia prawo (LI) z t-normą T dualną do t-konormy S, co kończy dowód. □

Z powyższego twierdzenia otrzymujemy charakteryzacje prawa (EP) dla implikacji s-probabilistycznych.

Wniosek 5.52. *Niech I_C^{sp} będzie implikacją s-probabilistyczną. Wtedy funkcja I_C^{sp} spełnia prawo* (EP) *wtedy i tylko wtedy, gdy I_C^{sp} jest (S,N)-implikacją.*

Powyższy wniosek jest konsekwencją następującego twierdzenia i faktu, iż naturalna negacja implikacji s-probabilistycznej jest negacją klasyczną.

Twierdzenie 5.53 ([40, Proposition 13])**.** *Niech I będzie taką implikacją rozmytą, że jej naturalna negacja N_I jest funkcją ciągłą. Wtedy I spełnia prawo* (EP) *wtedy i tylko wtedy, gdy I spełnia prawo* (LI) *z pewną t-normą.*

Uwaga 5.54. Z twierdzeń 5.42, 5.51 wynika, że tylko, gdy t-norma T jest kopułą, to wtedy implikacja s-probabilistyczna generowana z kopuły C spełniającej równanie (5.6) spełnia (LI) z t-normą T.

Lemat 5.55. *Niech C będzie kopułą. Jeśli implikacja s-probabilistyczna I_C^{sp} spełnia prawo* (LI) *z pewną t-normą T, to kopuła C spełnia równanie* (CCP).

Dowód. Na mocy lematu 5.49

$$T(x, 1-y) = x - C(x,y), \qquad x,y \in [0,1], \tag{5.7}$$

zamieniając y z $1-y$ w równaniu (5.6). Wstawiając w równaniu (5.7) x w miejsce $1-y$ oraz $1-y$ w miejsce x otrzymujemy

$$T(1-y, x) = 1 - y - C(1-y, 1-x), \qquad x,y \in [0,1]. \tag{5.8}$$

Ponieważ t-norma T jest przemienna to $T(x,1-y) = T(1-y,x)$, czyli ze wzorów (5.7) i (5.8) otrzymujemy

$$x - C(x,y) = 1 - y - C(1-y, 1-x), \qquad x,y \in [0,1],$$

co się sprowadza do równania (CCP) i kończy dowód twierdzenia. □

Wniosek 5.56. *Implikacja s-probabilistyczna I_C^{sp} oparta na kopule C, gdy jest (S,N)-implikacją, to kopuła C spełnia równanie* (CCP) *(czyli I_C^{sp} spełnia prawo* (CP)*).*

Korzystając z twierdzenia [18, Theorem 3.3] otrzymujemy.

Lemat 5.57. *Niech C będzie t-normą Franka $T_\lambda^{\mathbf{F}}$, dla pewnego $\lambda \in [0,\infty]$. Wtedy t-norma T określona wzorem (5.6) jest równa $T_{\frac{1}{\lambda}}^{\mathbf{F}}$, gdzie $\frac{1}{\infty} = 0$ i $\frac{1}{0} = \infty$.*

Dowód. Ustalmy $x, y \in [0,1]$, wtedy

$$x - T_0^{\mathbf{F}}(x, 1-y) = x - \min(x, 1-y) = \max(x+y-1, 0) = T_{\mathbf{LK}}(x,y) = T_\infty^{\mathbf{F}}(x,y),$$

oraz

$$x - T_\infty^{\mathbf{F}}(x, 1-y) = x - \max(x-y, 0) = \min(x,y) = T_{\mathbf{M}}(x,y) = T_0^{\mathbf{F}}(x,y).$$

Ustalmy teraz $\lambda \in (0,\infty)$. Wtedy

$$\begin{aligned} x - T_\lambda^{\mathbf{F}}(x, 1-y) &= \log_\lambda \lambda^x - \log_\lambda \left[1 + \frac{(\lambda^x - 1)(\lambda^{1-y} - 1)}{\lambda - 1}\right] \\ &= \log_\lambda \left[\frac{\lambda^x(\lambda-1)}{\lambda - 1 + (\lambda^x - 1)(\lambda^{1-y} - 1)}\right] \\ &= \log_\lambda \left[\frac{\lambda^x(\lambda-1)}{\lambda + \lambda^{1+x-y} - \lambda^{1-y} - \lambda^x}\right] = \log_\lambda \left[\frac{\lambda^{x+y}(\lambda-1)}{\lambda^{1+y} + \lambda^{1+x} - \lambda^{x+y} - \lambda}\right] \end{aligned}$$

Z drugiej strony

$$\begin{aligned} T_{\frac{1}{\lambda}}^{\mathbf{F}}(x,y) &= \log_{\frac{1}{\lambda}} \left[1 + \frac{((\frac{1}{\lambda})^x - 1)((\frac{1}{\lambda})^y - 1)}{\frac{1}{\lambda} - 1}\right] = -\log_\lambda \left[1 + \frac{\lambda(\lambda^{-x} - 1)(\lambda^{-y} - 1)}{1 - \lambda}\right] \\ &= \log_\lambda \left[\frac{-(\lambda - 1)}{1 - \lambda + \lambda(\lambda^{-x} - 1)(\lambda^{-y} - 1)}\right] = \log_\lambda \left[\frac{-(\lambda-1)}{1 - \lambda^{1-x} - \lambda^{1-y} + \lambda^{1-x-y}}\right] \\ &= \log_\lambda \left[\frac{-\lambda^{x+y}(\lambda - 1)}{\lambda^{x+y} - \lambda^{1+y} - \lambda^{1+x} + \lambda}\right] = \log_\lambda \left[\frac{\lambda^{x+y}(\lambda-1)}{\lambda^{1+y} + \lambda^{1+x} - \lambda^{x+y} - \lambda}\right], \end{aligned}$$

co kończy dowód. □

Każda kopuła łączna jest t-normą ciągłą (patrz twierdzenie 1.61). Następne twierdzenie odpowiada na pytanie, kiedy implikacja s-probabilistyczna oparta na kopułach łącznych spełnia (LI).

Twierdzenie 5.58. *Niech I_C^{sp} będzie implikacją s-probabilistyczną generowaną z kopuły łącznej C. Wtedy implikacja I_C^{sp} spełnia prawo* (LI) *z pewną t-normą wtedy i tylko wtedy, gdy kopuła C jest t-normą Franka $T_\lambda^{\mathbf{F}}$ dla pewnego $\lambda \in [0,\infty]$.*

Dowód. Z lematu 5.49 wynika

$$T(x,y) = x - C(x, 1-y), \qquad x, y \in [0,1].$$

$\Rightarrow$ Załóżmy, że I_C^{sp} spełnia (LI) z t-normą T. Z lematu 5.55 wynika, że kopuła C jest rozwiązaniem równanie (CCP). Na mocy wniosku 2.29 kopuła C jest t-normą Franka $T_\lambda^{\mathbf{F}}$ dla pewnego $\lambda \in [0,\infty]$ albo nietrywialną (niebędącą t-normą Franka) sumą porządkową kopuł postaci takiej jak w twierdzenie 2.24. Z lematu 5.57 wynika, że gdy kopuła C jest t-normą Franka $T_\lambda^{\mathbf{F}}$, dla pewnego $\lambda \in [0,\infty]$, to I_C^{sp} spełnia prawo (LI) z t-normą równą odpowiednio $T_{\frac{1}{\lambda}}^{\mathbf{F}}$. Pozostaje wykazać, że tylko dla kopuł postaci $T_\lambda^{\mathbf{F}}$, dla pewnego $\lambda \in [0,\infty]$ implikacje I_C^{sp} spełniają prawo (LI). Zauważmy, że gdy C nie jest t-normą Franka, to t-norma T także nie jest. Istotnie, gdyby $T = T^{\mathbf{F}}_{\lambda}$, dla pewnego $\lambda \in [0, \infty]$, to z lematu 5.40

$$C(x, y) = x - T^{\mathbf{F}}_{\lambda}(x, 1 - y), \qquad x, y \in [0, 1],$$

a z lematu 5.57 wynika, że $C = T^{\mathbf{F}}_{\frac{1}{\lambda}}$, co jest sprzeczne z naszym założeniem. Stąd wynika, że T musi być nietrywialną (niebędącą t-normą Franka) sumą porządkową kopuł postaci takiej jak w twierdzenie 2.24. W szczególności istnieje idempotentny element $x_0 \in (0, 1)$ t-normy T. Stąd

$$x_0 = T(x_0, x_0) = x_0 - C(x_0, 1 - x_0),$$

czyli $C(x_0, 1-x_0) = 0$, z monotoniczności $C(x, y) = 0$, dla $(x, y) \in [0, x_0] \times [0, 1-x_0]$. Natomiast, $C = (\langle a_k, b_k, T^{\mathbf{F}}_{\lambda_k}\rangle)_{k\in K}$ dla pewnego przeliczalnego zbioru K. Bez straty ogólności załóżmy, że $0 \in K$ i $a_0 = \min_{k\in K} a_k$. Stąd $a_0 = 0$ i $T^{\mathbf{F}}_{\lambda_0} = T_{\mathbf{LK}}$. Wtedy C musi być równe 0 w trójkącie $\{(x, y) \in [0, 1]^2 \mid y \leq 1 - x\}$. Stąd $C = W$, ale to prowadzi do sprzeczności, ponieważ $T^{\mathbf{F}}_{\infty} = W$.

$\Leftarrow$ Załóżmy, że C jest t-normą Franka. Niech T będzie t-normą określoną wzorem (5.6). Wtedy z lematu 5.57 T jest t-normą Franką (T jest także kopułą) i z twierdzenia 5.42 $I^{sp}_C = I_{S,N_C}$, gdzie S jest t-konormą dualną do T. Wystarczy zastosować twierdzenie 5.51. □

Wniosek 5.59. *Niech I^{sp}_C będzie implikacją s-probabilistyczną generowaną z kopuły C, spełniającą prawo* (LI) *z t-normą T. Wtedy kopuła C jest przemienna wtedy i tylko wtedy, gdy t-norma T spełnia równanie* (2.1) *($T^* = T$).*

Dowód. Z lematu 5.49 otrzymujemy

$$C(x, 1 - y) = x - T(x, y), \qquad x, y \in [0, 1].$$

Kopuła C jest przemienna wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych $x, y \in [0, 1]$

$$x - T(x, y) = C(x, 1 - y) = C(1 - y, x) = 1 - y - T(1 - y, 1 - x).$$

Z przemienności t-normy T, to jest równoważne z tym, iż $T^* = T$. □

Przykład 5.60. Niech $T = C_{\mathbf{H}}$ (patrz przykład 1.53. T jest t-normą oraz $T^* \neq T$ (ponieważ nie jest t-normą Franka). Wtedy kopuła C postaci

$$C(x, y) = x - T(x, 1 - y) = \frac{x^2 y}{1 - y + xy}, \qquad x, y \in [0, 1],$$

jest nieprzemienna. Ponadto, implikacja s-probabilistyczna I^{sp}_C spełnia (LI) z t-normą T oraz kopuła C spełnia równanie (CCP). Zauważmy, że $C = C_f$ dla $f(x) = \frac{1}{x} - 1$, czyli kopuła C jest kopułą DUCS (patrz 4.6) dla deformacji $d(x) = x$.

Wniosek 5.61. *Niech I^{sp}_C będzie implikacją s-probabilistyczną generowaną z kopuły C, spełniającą prawo* (LI) *z t-normą T. Wtedy kopuła C jest funkcją przemienną niełączną wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje istnieje taki przeliczalny co najmniej dwuelementowy zbiór K, że*

$$T = (\langle a_k, b_k, T^{\boldsymbol{F}}_{\lambda_k}\rangle)_{k\in K}, \tag{5.9}$$

gdzie dla każdego $k \in K$ istnieje takie $k' \in K$, że $\lambda_k = \lambda_{k'}$ oraz $a_k + b_{k'} = a_{k'} + b_k = 1$.

Dowód. Z lematu 5.49 otrzymujemy

$$C(x,y) = x - T(x, 1-y), \qquad x, y \in [0,1].$$

$\Rightarrow$ Załóżmy, że C jest przemienną i niełączną kopułą. Na mocy wniosku 5.59, $T^* = T$. Przypuśćmy, że T jest t-normą Franka. Stąd C jest także t-normą Franka z lematu 5.57, to jest sprzeczność. Z twierdzenia 2.24 otrzymujemy tezę.

$\Leftarrow$ Załóżmy, że T jest takiej postaci jak (5.9). Z wniosku 5.59, C jest przemienna. Przypuśćmy, że C jest łączna. Z twierdzenia 5.58, C jest t-normą Franka. To jest sprzeczne z założeniem o funkcji T. □

Przykład 5.62. Niech $T = (\langle 0, \frac{1}{2}, T_{\mathbf{P}} \rangle, \langle \frac{1}{2}, 1, T_{\mathbf{P}} \rangle)$. Wtedy na mocy twierdzenia 2.24 T spełnia równanie $T^* = T$. Stąd kopuła C postaci

$$C(x,y) = x - T(x, 1-y) = \begin{cases} 0, & (x,y) \in [0, \frac{1}{2}]^2 \\ x(2y-1), & (x,y) \in [0, \frac{1}{2}] \times [\frac{1}{2}, 1] \\ y(2x-1), & (x,y) \in [\frac{1}{2}, 1] \times [0, \frac{1}{2}] \\ x+y-1, & (x,y) \in [\frac{1}{2}, 1]^2 \end{cases},$$

jest kopułą przemienną, niełączną. Ponadto, implikacja s-probabilistyczna I_C^{sp} spełnia prawo importacji z t-normą T oraz C spełnia równanie (CCP).

Uwaga 5.63. Z lematu 5.55 wynika, że jeśli implikacja s-probabilistyczna I_C^{sp} spełniająca prawo (LI) z pewną t-normą, to kopuła C spełnia równanie (CCP). Twierdzenie w drugą stronę nie zachodzi. Istotnie, kopuła $C = \frac{T_{\mathbf{M}} + T_{\mathbf{LK}}}{2}$ z przykładu 2.26 spełnia równanie (CCP), ale nie istnieje taka t-norma, z którą implikacja s-probabilistyczna I_C^{sp} spełniająca prawo (LI). Ponieważ funkcja

$$T(x,y) = x - C(x, 1-y) = \frac{T_{\mathbf{LK}}(x,y) + T_{\mathbf{M}}(x,y)}{2}, \qquad x, y \in [0,1],$$

nie jest t-normą.

5.7 Przecięcia z implikacjami Yagera

Twierdzenie 5.64. *Jedyna implikacja s-probabilistyczna, która jest implikacją f-generowaną Yagera jest to implikacja oparta na kopule produktowej,*

$$\mathbb{I}_{\mathbb{C}}^{sprob} \cap \mathbb{I}_{\mathbb{F},\aleph} = \{I_{\mathbf{RC}}\}, \quad \mathbb{I}_{\mathbb{C}}^{sprob} \cap \mathbb{I}_{\mathbb{F},\infty} = \emptyset.$$

Dowód. Na początek pokażemy, że jeżeli implikacja s-probabilistyczna spełnia (LI) z t-normą $T_{\mathbf{P}}$, to musi być oparta na kopule Π. Istotnie, z lematu 5.49 wiemy, że kopuła C musi być postaci

$$x \cdot y = T_{\mathbf{P}}(x,y) = x - C(x, 1-y), \quad x, y \in [0,1],$$

stąd $C(x, 1-y) = x - xy = x(1-y)$, z dowolności $y \in [0,1]$ wynika, że $C = \Pi$, czyli $I_C^{sp} = 1 - x + xy$. Ponadto $N_{I_C^{sp}} = 1 - x$, czyli jest negacją rozmytą ciągłą, stąd na mocy twierdzenia 1.45 $I_C^{sp} \in \mathbb{I}_{\mathbb{F},\aleph}$. Ponieważ funkcja I_C^{sp} jest funkcją ciągłą, więc na mocy twierdzenia 1.46 $I_C^{sp} \notin \mathbb{I}_{\mathbb{F},\infty}$, co kończy dowód. □

Twierdzenie 5.65. *Nie istnieje implikacja s-probabilistyczna, która jest implikacją g- generowaną Yagera,*

$$\mathbb{I}_{\mathbb{C}}^{sprob} \cap \mathbb{I}_{\mathbb{G}} = \emptyset.$$

Dowód. Przypuśćmy, że $I \in \mathbb{I}_{\mathbb{C}}^{sprob} \cap \mathbb{I}_{\mathbb{G}}$, wtedy z lematu 5.2 $N_I = N_{\mathbf{C}}$. Z drugiej strony z definicji 1.42 $N_I = N_{\mathbf{D1}}$. Stąd $\mathbb{I}_{\mathbb{C}}^{sprob} \cap \mathbb{I}_{\mathbb{G}} = \emptyset$. □

Twierdzenie 5.66. *Nie istnieje implikacja probabilistyczna, która należy do rodziny $\mathbb{I}_{\mathbb{F},\aleph}$,*

$$\mathbb{I}_{\mathbb{C}}^{prob} \cap \mathbb{I}_{\mathbb{F},\aleph} = \emptyset.$$

Dowód. Niech I będzie implikacją probabilistyczną i przypuśćmy, że $I \in \mathbb{I}_{\mathbb{F},\aleph}$. Z lematu 5.1 wiemy, że $N_I = N_{\mathbf{D1}}$, ale z twierdzenia 1.45 wynika, że N_I jest funkcją ciągłą, sprzeczność. □

Uwaga 5.67. Zauważmy, że kiedy funkcja g jest wypukła, to implikacja g- generowana Yagera I_g jest implikacją probabilistyczną (patrz przykład 4.6). Ponadto ponieważ implikacja $I_{\mathbf{D}} \notin \mathbb{I}_{\mathbb{G}}$, to implikacja probabilistyczna generowana z kopuły $C_{g,d}$ DUCS należy do rodziny $\mathbb{I}_{\mathbb{G}}$ wtedy i tylko wtedy, gdy deformacja $d(x) = x^{\alpha}$ dla $\alpha \in (0, 1]$ (patrz 5.48).

Lemat 5.68. *Załóżmy, że C jest kopułą łączną. Niech I_C^p będzie implikacją probabilistyczną opartą na kopule C. Wtedy C jest archimedesowa wtedy i tylko wtedy, gdy $I_C^p(x, y) \neq 1$, dla wszystkich $x \in (0, 1]$, $y \in [0, 1)$.*

Dowód.

$\Leftarrow$ Istotnie jeśli $I_C^p(x, y) \neq 1$ dla wszystkich $x \in (0, 1]$, $y \in [0, 1)$, to w szczególności $C(x, x) < x$, dla $x \in (0, 1)$. To oznacza, że C jest archimedesowa.

$\Rightarrow$ Z drugiej strony, gdy C jest kopułą archimedesowa, to jest t-normą i na mocy twierdzenia 1.24 istnieje generator addytywny φ kopuły C. Przypuśćmy, że $C(x, y) = x$, dla pewnych $x, y \in (0, 1)$. Wtedy

$$\varphi^{-1}(\min(\varphi(x) + \varphi(y), \varphi(0))) = x,$$

czyli $x = 0$ lub $y = 1$, sprzeczność. □

Twierdzenie 5.69. *Załóżmy, że C jest kopułą łączną. Wtedy implikacja probabilistyczna I_C^p oparta na kopule C należy do rodziny $\mathbb{I}_{\mathbb{F},\infty}$ ($\mathbb{I}_{\mathbb{G},\infty}$) wtedy i tylko wtedy, gdy I_C^p jest funkcją ciągła w zbiorze $\{0\} \times (0, 1]$ spełniającą prawo* (LI) *z t-normą $T_{\mathbf{P}}$ oraz kopuła C jest ścisła.*

Dowód. Na mocy twierdzenia 1.43 $\mathbb{I}_{\mathbb{F},\infty} = \mathbb{I}_{\mathbb{G},\infty}$, więc wystarczy ograniczyć się do klasy $\mathbb{I}_{\mathbb{F},\infty}$. Załóżmy, że C jest kopułą łączną. Z definicji funkcja I_C^p jest ciągła w zbiorze $(0, 1] \times [0, 1]$. W przypadku punktu $(0, 0)$, $\lim_{n\to\infty} I_C^p\left(\frac{1}{n}, 0\right) = 0$, skąd funkcja I_C^p nie jest ciągła w $(0, 0)$. Oczywiście, gdy $x = 0$ lub $y = 1$, to $I_C^p(x, y) = 1$.

$\Rightarrow$ Załóżmy, że $I_C^p \in \mathbb{I}_{\mathbb{F},\infty}$. Wtedy na mocy twierdzenia 1.46 I_C^p jest funkcją ciągłą w zbiorze $\{0\} \times (0, 1]$ spełniającą prawo (LI) z t-normą $T_{\mathbf{P}}$ oraz $I_C^p(x, y) \neq 1$, dla wszystkich $x \in (0, 1]$, $y \in [0, 1)$. Stąd na mocy lematu 5.68 kopuła C jest archimedesowa. Wystarczy pokazać, że C jest ścisła. Przypuśćmy, że C nie jest kopułą ścisłą, czyli istnieje taki addytywny generator φ, że $C(x, y) = \varphi^{-1}(\min(\varphi(x) + \varphi(y), \varphi(0)))$ i $\varphi(0) < \infty$. Z ciągłości φ dla każdego $y \in (0, 1)$, istnieje taki $x_0 \in (0, 1)$, że $\varphi(0) \leq \varphi(x) + \varphi(y)$ dla każdego $x \leq x_0$. Stąd $\lim_{x\to 0^+} \frac{C(x,y)}{x} = 0$, sprzeczność ponieważ $I_C^p(0, y) = 1$.

$\Leftarrow$ Z drugiej strony, gdy I_C^p jest funkcją ciągła w zbiorze $\{0\} \times (0,1]$ (czyli ciągłą w $[0,1]^2 \setminus \{(0,0)\}$) spełniającą prawo (LI) z t-normą $T_{\mathbf{P}}$ oraz kopuła C jest t-normą ścisłą (w szczególności archimedesowa). Wtedy wykorzystując lemat 5.68 i twierdzenie 1.46 otrzymujemy tezę twierdzenia. □

Przykład 5.70. Implikacja rozmyta $I_{\mathbf{D}}$ jest implikacją probabilistyczna generowaną z ścisłej kopuły Π spełniającą prawo (LI) z t-normą $T_{\mathbf{P}}$, ale jest funkcją nieciągłą w punktach $\{0\} \times (0,1)$ i tym samym nie należy do rodziny $\mathbb{I}_{\mathbb{F},\infty}$ ($\mathbb{I}_{\mathbb{G},\infty}$).

Przykład 5.71. Niech $C_{\mathbf{H}}$ będzie produktem Hamachera z przykładu 1.53. Wtedy $C_{\mathbf{H}}$ jest kopułą ścisłą oraz implikacja probabilistyczna $I_{C_{\mathbf{H}}}^p$ spełnia prawo importacji z t-normą $T_{\mathbf{P}}$. Ponadto dla $y_0 \in (0,1]$

$$\lim_{(x,y)\to(0,y_0)} I_{C_{\mathbf{H}}}^p(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,y_0)} \frac{y}{x+y-xy} = 1,$$

co dowodzi, że $I_{C_{\mathbf{H}}} \in \mathbb{I}_{\mathbb{F},\infty}$.

Twierdzenie 5.72. *Jedyną implikacją probabilistyczną I_C^p opartą na łącznej kopule C należącą do rodziny $\mathbb{I}_{\mathbb{G},\aleph}$ jest implikacja Goguena, $I_{\mathbf{GG}}$.*

Dowód. Implikacja $I_{\mathbf{GG}} \in \mathbb{I}_{\mathbb{G},\infty}$ oraz $I_{\mathbf{GG}} = I_{\mathbf{M}}^p$. Załóżmy, że I_C^p jest implikacją probabilistyczną opartą na łącznej kopule $C \neq M$. Przypuśćmy, że $I_C^p \in \mathbb{I}_{\mathbb{G},\aleph}$ i niech t będzie taką funkcją jak w twierdzeniu 1.48. Rozważmy dwa przypadki.

1. C jest archimedesowa. Wtedy z lematu 5.68 i twierdzenia 1.48 $1 > t(x) > y > 0$, dla dowolnych $x, y \in (0,1)$, to prowadzi do sprzeczności.

2. C jest nietrywialną sumą porządkową kopuł archimedesowych (niebędącą ani kopułą archimedesową ani M). Wtedy niech A będzie takim przeliczalnym zbiorem, że

$$C = (\langle a_k, b_k, C_k\rangle)_{k\in A} \quad \text{oraz } a_0 = \inf \bigcup_{k\in A} \{[a_k, b_k]\}.$$

   Z definicji sumy porządkowej $t(x) \leq x$, dla $x \in [0, a_0]$. Z ciągłości i z monotoniczności t wynika, że dla każdego $a_0 < y < b_0$, istnieje taki $a_0 < x_0 < b_0$, że $t(x_0) < y$. Wtedy $x_0 = a_0 + (b_0 - a_0)C_0\left(\frac{x_0-a_0}{b_0-a_0}, \frac{y-a_0}{b_0-a_0}\right)$, stąd $C_0\left(\frac{x_0-a_0}{b_0-a_0}, \frac{y-a_0}{b_0-a_0}\right) = \frac{x_0-a_0}{b_0-a_0}$. Ponieważ C_0 jest archimedesowa to na mocy lematu 5.68 dochodzimy do sprzeczności, co kończy dowód.

□

Twierdzenie 5.73. *Nie istnieje implikacja warunkowa która należy do którejkolwiek z rodzin $\mathbb{I}_{\mathbb{F}}$, $\mathbb{I}_{\mathbb{G}}$,*

$$\mathbb{I}_{\mathbb{C}}^{cond} \cap \mathbb{I}_{\mathbb{F}} = \emptyset, \qquad \mathbb{I}_{\mathbb{C}}^{cond} \cap \mathbb{I}_{\mathbb{G}} = \emptyset.$$

Dowód. Niech I będzie implikacją warunkową i przypuśćmy, że $I \in \mathbb{I}_{\mathbb{F},\aleph}$. Z lematu 5.3 wiemy, że $N_I = N_{\mathbf{D1}}$, ale z twierdzenia 1.45 wynika, że N_I jest funkcją ciągłą, sprzeczność. Przypuśćmy teraz, że $I \in \mathbb{I}_{\mathbb{G}}$. Z definicji implikacji g-generowanej Yagera istnieje taka ciągła ściśle rosnąca funkcja $g\colon [0,1] \to [0,\infty]$, że $g(0) = 0$ i

$$I(x,y) = g^{-1}\left(\min\{g(1), \frac{g(y)}{x}\}\right), \qquad x, y \in [0,1],$$

gdzie $0 \cdot \infty = \infty$ i $\frac{1}{0} = \infty$. Zauważmy, że

$$I(x,y) \geq y, \qquad x,y \in [0,1]. \tag{5.10}$$

Istotnie, gdy $x = 1$, to $I(1,y) = y$. Załóżmy, że $x < 1$ i $y \in [0,1]$ wtedy

$$I(x,y) \geq y \Leftrightarrow \min\{g(1), \frac{g(y)}{x}\} \geq g(y),$$

ale $g(1) \geq g(y)$ i $\frac{g(y)}{x} \geq g(y)$, to dowodzi (5.10). Ustalmy $y \in (0,1)$ i takie $x_0 \in (0,1)$, że $x_0 > \frac{g(y)}{g(1)}$ (gdy $g(1) = \infty$, to zakładamy, że $\frac{g(y)}{g(1)} = 0$). Niech $\varepsilon = I(x_0,y) - y$, wtedy $\varepsilon > 0$. Istotnie, ponieważ funkcja g^{-1} jest ściśle rosnąca, to

$$\varepsilon = I(x_0,y) - y = g^{-1}\left(\min\{g(1), \frac{g(y)}{x_0}\}\right) - y = g^{-1}\left(\frac{g(y)}{x_0}\right) - y > g^{-1}(g(y)) - y = 0.$$

Ponieważ każda implikacja g-generowana Yagera jest implikacją rozmytą, więc

$$I(x,y) \geq I(x_0,y) = \varepsilon + y, \qquad x \in [0,x_0].$$

Wtedy korzystając z (5.10)

$$\begin{aligned}\int_0^1 I(t,y)dt &= \int_0^{x_0} I(t,y)dt + \int_{x_0}^1 I(t,y)dt \\ &\geq x_0(\varepsilon + y) + y(1 - x_0) = y + x_0\varepsilon > y,\end{aligned}$$

ale to przeczy wnioskowi 4.16 i kończy dowód twierdzenia. □

5.8 Przecięcia z QL-operatorami

Twierdzenie 5.74 ([3, Proposition 5.10])**.** *Rodzina wszystkich QL-operatorów jest rozłączna z rodziną wszystkich implikacji probabilistycznych, czyli*

$$\mathbb{I}_{\mathbb{QL}} \cap \mathbb{I}_{\mathbb{C}}^{prob} = \emptyset.$$

Dowód. Przypuśćmy, że $\mathbb{I}_{\mathbb{QL}} \cap \mathbb{I}_{\mathbb{C}}^{prob} \neq \emptyset$. Stąd istnieje implikacja probabilistyczna I_C^p oparta na kopule C oraz taka t-konorma S, negacja rozmyta N i t-norma T, że $I_C^p(x,y) = S(N(x), T(x,y))$. Stąd dla $y = 0$ otrzymujemy

$$I_C^p(x,0) = S(N(x),0) = N(x),$$

więc z lematu 5.1 $N = N_{\mathbf{D1}}$. Wtedy, dla $x > 0$ mamy

$$I_C^p(x,y) = S(0, T(x,y)) = T(x,y).$$

Ponieważ $I_C^p(x,y) = \frac{C(x,y)}{x}$, dla $x > 0$, stąd $C(x,y) = xT(x,y)$, dla $x > 0$ i w szczególności $C(x,1) = xT(x,1) = x^2$, co jest sprzeczne z warunkiem (**C2**) definicji kopuły. □

Twierdzenie 5.75. *Rodzina wszystkich implikacji warunkowych jest rozłączna z rodziną wszystkich QL-operatorów, czyli,*

$$\mathbb{I}_{\mathbb{QL}} \cap \mathbb{I}_{\mathbb{C}}^{cond} = \emptyset.$$

Dowód. Przypuśćmy, że $\mathbb{I}_{\mathbb{QL}} \cap \mathbb{I}_{\mathbb{C}}^{prob} \neq \emptyset$. Stąd istnieje implikacja warunkowa I_C^∂ oparta na kopule C oraz taka t-konorma S, negacja rozmyta N i t-norma T, że

$$I_C^\partial(x,y) = S(N(x), T(x,y)).$$

Stąd dla $y = 0$ otrzymujemy, że $I^\partial(x,0) = S(N(x),0) = N(x)$, więc z lematu 5.3 $N = N_{\mathbf{D1}}$. Wtedy, dla $x > 0$ mamy

$$I_C^\partial(x,y) = S(0, T(x,y)) = T(x,y),$$

czyli $I^\partial(x,1) = x$. Stąd na mocy ciągłości bezwzględnej kopuły C

$$C(x,1) = \int_0^x \frac{\partial C(t,1)}{\partial t} dt = \int_0^x t dt = \frac{x^2}{2},$$

co jest sprzeczne z warunkiem (**C2**) definicji kopuły. □

W celu charakteryzacji $\mathbb{I}_{\mathbb{C}}^{sprob} \cap \mathbb{I}_{\mathbb{QL}}$ potrzebujemy pojęcia prawa wyłączonego środka.

Definicja 5.76 ([6, Definition 2.3.8])**.** Niech S będzie t-konormą i niech N będzie negacją rozmytą. Powiemy, że para (S,N) spełnia ***prawo wyłączonego środka*** (ang. *law of excluded middle*), jeśli

$$S(N(x), x) = 1, \qquad x \in [0,1]. \tag{LEM}$$

Teraz jesteśmy gotowi do udowodnienia następującego twierdzenia.

Twierdzenie 5.77 ([3, Proposition 5.12])**.** *QL-operator $I_{S,N,T}$ jest implikacją s-probabilistyczna wtedy i tylko wtedy, gdy $N = N_{\mathbf{C}}$, $(S, N_{\mathbf{C}})$ spełnia* (LEM) *i ponadto t-konorma S i t-norma T spełniają następującą nierówność*

$$S(1-x_1, T(x_1,y_2)) + S(1-x_2, T(x_2,y_1)) \leq S(1-x_1, T(x_1,y_1)) + S(1-x_2, T(x_2,y_2)), \tag{5.11}$$

dla wszystkich takich $x_1, x_2, y_1, y_2 \in [0,1]$, że $x_1 \leq x_2, y_1 \leq y_2$.

Dowód.

⇐ Załóżmy, że $I_{S,N,T}$ jest taką QL-operacją, że $N = N_{\mathbf{C}}$, para $(S, N_{\mathbf{C}})$ spełnia (LEM) oraz funkcje S, T spełniają (5.11). Niech funkcja $C\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ będzie następującej postaci

$$C(x,y) = S(N(x), T(x,y)) + x - 1, \qquad x,y \in [0,1]. \tag{5.12}$$

Funkcja C jest kopułą. Istotnie, dla dowolnych $x, y \in [0,1]$

(C1) $C(x,0) = S(1-x,0) + x - 1 = 0$ i $C(0,y) = S(1,0) - 1 = 0$.

(C2) $C(x,1) = S(1-x,x) + x - 1$, wtedy $C(x,1) = x \iff S(1-x,x) = 1$, co jest zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy para $(S, N_{\mathbf{C}})$ spełnia (LEM).

(C3) $C(1,y) = S(0, T(1,y)) + 1 - 1 = S(0,y) = y$.

(C4)
$$\begin{aligned}&C(x_2,y_2)-C(x_2,y_1)-C(x_1,y_2)+C(x_1,y_1)\geq 0 \Longleftrightarrow\\ &S(1-x_1,T(x_1,y_2))+S(1-x_2,T(x_2,y_1))\leq\\ &S(1-x_1,T(x_1,y_1))+S(1-x_2,T(x_2,y_2)),\end{aligned}$$

dla wszystkich takich $x_1,x_2,y_1,y_2\in[0,1]$, że $x_1\leq x_2, y_1\leq y_2$, co daje nierówność (5.11).

To dowodzi, że $I_{S,N,T}$ jest implikacją s-probabilistyczną.

$\Rightarrow$ Załóżmy, że QL-operator $I_{S,N,T}$ jest implikacją s-probabilistyczną generowaną z kopuły C, czyli zachodzi wzór (5.12). Wówczas wstawiając w równaniu (5.12) $y=0$ otrzymujemy, że $N=N_{\mathbf{C}}$. Z warunku (**C2**) wynika, że para $(S,N_{\mathbf{C}})$ spełnia (LEM) oraz z warunku (**C4**) dostajemy (5.11). $\square$

Przykładem implikacji s-probabilistycznych należących do klasy $\mathbb{I}_{\mathbb{QL}}$ są implikacje $I_{\mathbf{KD}}, I_{\mathbf{RC}}, I_{\mathbf{LK}}$. Wszystkie te implikacje są QL-operatorami postaci $I_{S_{\mathbf{LK}},N_{\mathbf{C}},T}$, gdzie T jest odpowiednią t-normą. Następujące twierdzenie pokazuje kiedy QL-operatory postaci $I_{S_{\mathbf{LK}},N_{\mathbf{C}},T}$ są implikacjami s-probabilistycznymi.

Twierdzenie 5.78. *QL-operator $I_{S_{\mathbf{LK}},N_{\mathbf{C}},T}$ jest implikacja s-probabilistyczną wtedy i tylko wtedy, gdy t-norma T jest kopułą. Ponadto, dla $T\in\mathcal{C}$,*

$$\textit{QL-operator } I_{S_{\mathbf{LK}},N_{\mathbf{C}},T}\in\mathbb{I}_{\mathbb{S},\mathbb{N}}\Longleftrightarrow T\in\{T^{\mathbf{F}}_{\lambda}\mid\lambda\in[0,\infty]\}.$$

Dowód. Rozważmy QL-operacje $I\colon[0,1]^2\to[0,1]$ postaci

$$I(x,y)=S_{\mathbf{LK}}(N_{\mathbf{C}}(x),T(x,y))=\min(1-x+T(x,y),1),\qquad x,y\in[0,1],$$

gdzie T jest t-normą. Wtedy I jest implikacją s-probabilistyczną wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka kopuła C, że

$$\begin{aligned}C(x,y)+1-x=I(x,y)\Longleftrightarrow C(x,y)&=\min(1-x+T(x,y),1)+x-1\\ &=\min(T(x,y),x)=T(x,y).\end{aligned}$$

To oznacza, że
$$I\in\mathbb{I}^{sprob}_{\mathbb{C}}\Longleftrightarrow T\in\mathcal{C}.$$

Załóżmy, że $T\in\mathcal{C}$. Wtedy $I\in\mathbb{I}^{sprob}_{\mathbb{C}}$ i $I=I^{sp}_{T}$ oraz na mocy twierdzeń 5.51, 5.58 $I\in\mathbb{I}_{\mathbb{S},\mathbb{N}}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $T\in\{T^{\mathbf{F}}_{\lambda}\mid\lambda\in[0,\infty]\}$, co kończy dowód twierdzenia. $\square$

Bibliografia

[1] K. Atanassov. Intuitionistic fuzzy sets. In V. Sgurev, editor, *VII ITKR's Session*, 1983.

[2] M. Baczyński, J. Drewniak, and J. Sobera. Semigroups of fuzzy implications. *Tatra Mountains Mathematical Publishers*, 21:61–71, 2001.

[3] M. Baczyński, P. Grzegorzewski, P. Helbin, and W. Niemyska. Properties of the probabilistic implications and S-implications. *Information Sciences*, 331:2–14, 2016.

[4] M. Baczyński, P. Grzegorzewski, and R. Mesiar. Fuzzy implications based on semicopulas. In *IFSA-EUSFLAT 2015*, pages 792–798, Amsterdam, 2015.

[5] M. Baczyński, P. Grzegorzewski, R. Mesiar, P. Helbin, and W. Niemyska. Fuzzy implications based on semicopulas. *Fuzzy Sets and Systems*, 2016. accepted, doi: http://dx.doi.org/10.1016/j.fss.2016.09.009.

[6] M. Baczyński and B. Jayaram. *Fuzzy Implications*, volume 231 of *Studies in Fuzziness and Soft Computing*. Springer, Berlin Heidelberg, 2008.

[7] J. Balasubramaniam. Contrapositive symmetrisation of fuzzy implications - revisited. *Fuzzy Sets and Systems*, 157(17):2291–2310, 2006.

[8] R.E. Barlow and F. Proschan. *Statistical Theory of Reliability and Life Testing*. Rinehart and Winston, Holt, 1975.

[9] G. Birkoff. *Lattice Theory*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 3rd edition, 1967.

[10] P. Capéraá, A. L. Fougéres, and C. Genest. Bivariate distributions with given extreme value attractor. *Journal of Multivariate Analysis*, 72:30–49, 2000.

[11] K. Demirli and B. De Baets. Basic properties of implicators in a residual framework. *Tatra Mountains Mathematical Publishers*, 16:31–46, 1999.

[12] A. Dolati, J.F. Sánchez, and M. Úbeda Flores. A copula-based family of fuzzy implication operators. *Fuzzy Sets and Systems*, 211:51–61, 2013.

[13] J. Drewniak. Invariant fuzzy implications. *Soft Computing*, 10(10):979–980, 2006.

[14] D. Dubois and H. Prade. Fuzzy sets, probability and measurement. *European Journal of Operational Research*, 40(10):135–154, 1989.

[15] F. Durante and P. Jaworski. Invariant dependence structure under univariate truncation. *Statistics*, 46:263–277, 2012.

[16] F. Durante, E.P Klement, R. Mesiar, and C. Sempi. Conjunctors and their residual implicators: Characterzations and construction methods. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 4:343–356, 2007.

[17] F. Durante and C. Sempi. Semicopulae. *Kybernetika*, 41:315–358, 2005.

[18] J. Fodor and M. Roubens. *Fuzzy Preference Modelling and Multicriteria Decision Support*. Kluwer, Dordrecht, 1994.

[19] J.C. Fodor. Contrapositive symmetry of fuzzy implications. *Fuzzy Sets and Systems*, 69:141–156, 1995.

[20] M.J. Frank. On the simultaneous associativity of $F(x, y)$ and $x + y - F(x, y)$. *Aequationes Mathematicae*, 19:194–226, 1979.

[21] C. Genest, J. J. Quesada Molina, J. A. Rodriguez Lallena, and C. Sempi. A characterization of quasi-copulas. *Journal of Multivariate Analysis*, 69:193–205, 1999.

[22] G. Gierz, K. H. Hoffmann, K. Keimel, J. D. Lawson, M. Mislove, and D.S. Scott. *A Compendium of Continous Lattices*. Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[23] M. B. Gorzałczany. A method of inference in approximate reasoning based on interval valued fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 21:1–17, 1987.

[24] S. Gottwald. *A Treatise on Many-Valued Logic*. Research Studies Press, Baldock, 2001.

[25] P. Grzegorzewski. Probabilistic implications. In *EUSFLAT-2011 and LFA-2011*, pages 254–258, Amsterdam, 2011.

[26] P. Grzegorzewski. Survival implications. In S. Greco, B. Bouchon-Meunier, G. Coletti, M. Fedrizzi, B. Matarazzo, and R.R. Yager, editors, *IPMU 2012, Part II*, volume 298 of *Communications in Computer and Information Science*, pages 335–344, 2012.

[27] P. Grzegorzewski. Probabilistic implications. *Fuzzy Sets and Systems*, 226:53–66, 2013.

[28] P. Grzegorzewski. On functions derived from fuzzy implications. In J.P. Carvalho, M. J. Lesot, U. Kaymak, S. Vieira B. Bouchon-Meunier, and R.R. Yager, editors, *IPMU 2016, Part I*, volume 610 of *Communications in Computer and Information Science*, pages 423–434, Amsterdam, 2016.

[29] P. Helbin and M. Baczyński. Properties of the survival implications and S-implications. In *IFSA-EUSFLAT 2015*, pages 807–814, Amsterdam, 2015.

[30] D. Hliněná, M. Kalina, and P. Král. Fuzzy preference modelling and some consequences for fuzzy implications and quasi-copulas. In *EUSFLAT 2013*, pages 260–265, Amsterdam, 2013.

[31] B. Jayaram. Yager's new class of implications and some classical tautologies. *Information Science*, 177:930–944, 2006.

[32] B. Jayaram. On the law of importation $(x \wedge y) \to z \equiv (x \to (y \to z))$ in fuzzy logic. *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, 16:130–144, 2008.

[33] B. Jayaram, M. Baczyński, and R. Mesiar. R-implications and the exchange principle: The case of border continuous t-norms. *Fuzzy Sets and Systems*, 224:93–105, 2013.

[34] E.P. Klement, R. Mesiar, and E. Pap. *Triangular Norms*. Kluwer, Dordrecht, 2000.

[35] E.P. Klement, R. Mesiar, and E. Pap. Invariant copulas. *Kybernetika*, 38(3):275–285, 2002.

[36] A. Król. Dependencies between fuzzy conjunctions and implications. In S. Galichet, J. Montero, and G. Mauris, editors, *EUSFLAT-LFA 2011*, pages 230–237, Amsterdam, 2011.

[37] K. Kuczma. *An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe (Polish Scientific Publishers) and Uniwersytet Śląski, Warszawa–Kraków–Katowice, 1985.

[38] S. Łojasiewicz. *Wstęp do Teorii Funkcji Rzeczywistych*. PWN, Warszawa, 1976.

[39] S. Massanet, D. Ruiz-Aguilera, and J. Torrens. On two construction methods of copulas from fuzzy implicationfunctions. *Artificial Intelligence*, 5(1):1–14, 2015.

[40] S. Massanet and J. Torrens. The law of importation versus exchange principle on fuzzy implications. *Fuzzy Sets and Systems*, 168:2111–2127, 2011.

[41] S. Massanet and J. Torrens. On a new class of fuzzy implications: h-implications and generalizations. *Fuzzy Sets and Systems*, 168:47–69, 2011.

[42] S. Massanet and J. Torrens. On the characterization of Yager's implications. *Information Sciences*, 201:1–18, 2012.

[43] S. Massanet and J. Torrens. Threshold generation method of construction of a new implication from two given ones. *Fuzzy Sets and Systems*, 205:50–75, 2012.

[44] K. Maurin. *Analiza cześć I: Elementy*. PWN, Warszawa, 2010.

[45] R. Mesiar and M. Pekárová. Residual implications and left-continous t-norms which are ordinal sums of semigroups. *Fuzzy Sets and Systems*, 143:47–52, 2004.

[46] R. Mesiar and M. Pekárová. Ducs copulas. *Kybernetika*, 46:1069–1077, 2010.

[47] R. Mesiar and C. Sempi. Ordinal sums and idempotents of copulas. *Aequationes Mathematicae*, 79:39–52, 2010.

[48] R. Moynihan. On the class of τ_t semigroups of probability distribution functions ii. *Aequationes Mathematicae*, 17:19–40, 1978.

[49] R.B. Nelsen. *An Introduction to Copulas.* Springer, New York, 2nd edition, 2006.

[50] R. Sambuc. *Fonctions ϕ-floues. application á l'aide au diagnostic en pathololologie thyroidienne.* PhD thesis, Univ. Marseille, France, 1975.

[51] B. Schweizer and A. Sklar. *Probablistic Metric Spaces.* North - Holland, Amsterdam, 1983.

[52] N. R. Vemuri and B. Jayaram. Representations through a monoid on the set of fuzzy implications. *Fuzzy Sets and Systems*, 247:51–67, 2014.

[53] N. R. Vemuri and B. Jayaram. The $\circledast$-composition of fuzzy implications: Closures with respect to properties, powers and families. *Fuzzy Sets and Systems*, 275:58–87, 2015.

[54] R. R. Yager. On some new classes of implication operators and their role in approximate reasoning. *Information Sciences*, 167:193–216, 2004.

[55] L.A. Zadeh. Fuzzy sets. *Information and Control*, 8:338–253, 1965.

[56] L.A. Zadeh. Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 9:28–44, 2010.